NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE MATHIEU

Solution des questions de l'algèbre Bertrand (2e édition, chapitre XVIII)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 12-19

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__12_1>

SOLUTION DES QUESTIONS DE L'ALGÈBRE BERTRAND

(2e édition, chapitre XVIII);

PAR M. ÉMILE MATHIEU,
Professeur

I. Trouver la dérivée de

$$\log \operatorname{arc} \sin x, \quad \log \operatorname{arc} \cos x, \quad \log \operatorname{arc} \operatorname{tang} x.$$

Pour les deux premières quantités, on a

$$\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}\,\text{arc sin}\,x};$$

pour la troisième, on a

$$\frac{1}{(1+x^2)\,\text{arc tang}\,x}.$$

II. Trouver la dérivée de arc sin $2x\sqrt{1-x^2}$ et dire pour quelle raison cette dérivée est double de celle de arc sin x.

Écrivons d'abord cette expression arc sin $\sqrt{4x^2-4x^4}$, sa dérivée est

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}}\times\frac{2x-4x^3}{\sqrt{x^2-x^4}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette dérivée est double de celle de arc sin x, parce que arc sin $2x\sqrt{1-x^2}$ est double de arc sin x. Posons en effet

$$x = \sin y \quad \text{ou} \quad y = \text{arc sin}\,x\ (*),$$

et nous aurons

$$\text{arc sin}\,2x\sqrt{1-x^2} = \text{arc sin}\,(2\sin y\cos y) = 2y.$$

III. Trouver la dérivée de arc tang $\frac{a+x}{1-ax}$ et dire pour quelle raison cette dérivée est la même que celle de arc tang x.

La dérivée de arc tang $\frac{a+x}{1-ax}$ est

$$\frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2}\times\frac{1-ax+(a+x)a}{(1-ax)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1+x^2};$$

elle est la même que celle de arc tang x, parce que

(*) Les Anglais écrivent arc sin $x = \sin^{-1}x$. Cette notation présente des avantages dans le calcul fonctionnel. TM.

arc tang $\frac{a+x}{1-ax}$ ne diffère de arc tang x que d'une constante. Posons en effet

$$a = \text{tang}\,\alpha, \quad x = \text{tang}\,y,$$

et nous aurons

$$\text{arc tang}\,x = y \ (^*),$$

$$\text{arc tang}\frac{a+x}{1-ax} = \text{arc tang}[\text{tang}(\alpha+y)] = y+\alpha.$$

IV. Trouver la dérivée de arc tang $\frac{a+b+x-abx}{1-ab-ax-bx}$.
Dire pourquoi elle est la même que la précédente. On a

$$\frac{a+b+x-abx}{1-ab-ax-bx} = \frac{\frac{a+b}{1-ab}+x}{1-\frac{a+b}{1-ab}x}.$$

L'expression dont on cherche la dérivée est donc celle de la précédente, dans laquelle on a changé a en $\frac{a+b}{1-ab}$. Donc la dérivée doit être encore $\frac{1}{1+x^2}$.

V. Trouver les bases dans lesquelles un nombre peut être égal à son logarithme, en employant l'un des procédés suivants :

1°. On étudiera la fonction $x - \log x$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir nulle.

2°. On étudiera la fonction $\frac{x}{\log x}$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

3°. On étudiera la fonction $a^x - x$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à zéro.

4°. On étudiera la fonction $\frac{a^x}{x}$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

(*) arc tang x = tang^{-1}x TM.

Étudions d'abord la fonction $y = x - \log x$. La dérivée est

$$y' = 1 - \frac{\log e}{x}.$$

Supposons d'abord la base $a > 1$. Depuis $x = 0$ jusque $x = \log e$, y' est négatif, et depuis $x = \log e$ jusque $x = \infty$, y' est positif.

Ainsi y décroît lorsque x varie de 0 à $\log e$, et croît lorsque x varie de $\log e$ à ∞, et la marche de la fonction sera indiquée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} x = 0, & y = \infty, \\ x = \log e, & y = \log e - \log(\log e) \text{ minimum}, \\ x = \infty, & y = \infty. \end{array}$$

Pour que la fonction y puisse devenir nulle, il faut donc que l'on ait

$$\log e - \log(\log e) < 0$$

ou

$$e < \log e,$$

ce qui devient successivement

$$e < \frac{1}{la},$$

$$la < \frac{1}{e},$$

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si on suppose, en second lieu, la base $a < 1$, $\log e$ est négatif, il n'y a plus de minimum et y croît d'une manière continue depuis $-\infty$ jusque $+\infty$, donc y passe une fois par 0, donc la condition cherchée est bien

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

2°. Etudions la fonction

$$y = \frac{x}{\log x}.$$

Nous aurons

$$y' = \frac{\log x - \log e}{(\log x)^2},$$

et y' s'annule pour $x = e$.

Supposons d'abord $a > 1$.

Pour	on aura
$x = 0$,	$y = 0$,
$x = 1 - h$,	$y =$ une quantité négative très-grande,
$x = 1$,	$y = \pm \infty$,
$x = 1 + h$,	$y =$ une quantité positive très-grande,
$x = e$,	$y = \frac{e}{\log e}$ minimum,
$x = \infty$,	$y = \infty$.

Pour que la fonction $\frac{x}{\log x}$ puisse être égale à l'unité, il faudra donc que l'on ait

$$\frac{e}{\log e} < 1 \quad \text{ou} \quad a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si a est < 1, on aura

$x = 0$,	$y = 0$,
$x = 1 - h$,	$y =$ une quantite positive très-grande,
$x = 1$,	$y = \pm \infty$,
$x = 1 + h$,	$y =$ une quantite négative très-grande,
$x = e$,	$y = \frac{e}{\log e}$ maximum (quantité négative),
$x = \infty$,	$y = -\infty$.

La fonction $\frac{x}{\log x}$ passera une fois par la valeur 1, et c'est entre $x = 0$ et $x = 1$.

3°. Étudions la fonction

$$y = a^x - x.$$

Nous aurons

$$y' = a^x\, la - 1.$$

Supposons $a > 1$, y' sera négatif, lorsque x variera de $-\infty$ à $x = \log\left(\frac{1}{la}\right)$, et sera positif, lorsque x variera de cette valeur à $x = \infty$. Donc lorsque x varie de $-\infty$ à $\log\left(\frac{1}{la}\right)$, la fonction y est décroissante, et elle est décroissante depuis $x = \log\left(\frac{1}{la}\right)$ jusque $x = \infty$, et on a

$$\begin{array}{ll} x = -\infty, & y = +\infty, \\ x = \log\left(\frac{1}{la}\right), & y = \log e - \log(\log e) \text{ minimum}, \\ x = \infty, & y = \infty. \end{array}$$

Pour que y s'annule, il faudra que l'on ait

$$\log e - \log(\log e) < 0,$$

ou

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si a est < 1, y' est constamment négatif, et la fonction y décroîtra constamment de $+\infty$ à $-\infty$, lorsque x variera de $-\infty$ à $+\infty$, donc y s'annulera une fois.

4°. Étudions la fonction

$$y = \frac{a^x}{x}.$$

Nousa urons

$$y' = \frac{xa^x\, la - a^x}{x^2}.$$

Supposons $a > 1$, on voit facilement que y est négatif lorsque x varie de $-\infty$ à $\frac{1}{la}$, et qu'il est positif lorsque x varie de $\frac{1}{la}$ à ∞.

La fonction y décroît de 0 à $-\infty$, lorsque x varie de $-\infty$ à 0; y décroît encore de $+\infty$ à $a^{\frac{1}{la}} la$, lorsque x varie de 0 à $\frac{1}{la}$, et y croît de $a^{\frac{1}{a}} la$ à $+\infty$, lorsque x varie de $\frac{1}{la}$ à $+\infty$.

Si y passe par l'unité, $a^{\frac{1}{la}} la$ étant un minimum, on aura

$$a^{\frac{1}{la}} la < 1$$

ou

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si a est < 1, on voit facilement que y varie de $-\infty$ à $a^{\frac{1}{la}} la$, lorsque x varie de 0 à $\frac{1}{la}$; il est maximum pour $x = \frac{1}{la}$, et décroît de $a^{\frac{1}{la}} la$ à $-\infty$, lorsque x varie de $\frac{1}{la}$ à 0. Enfin y décroît de ∞ à 0, lorsque x varie de 0 à ∞. Et on voit que y passera une fois par l'unité.

VI. Examiner si l'équation

$$x^m = m^x$$

peut admettre d'autre solution que $x = m$.

On met facilement cette équation sous la forme

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log m}{m}.$$

On répondra donc à la question en étudiant la fonction $\frac{\log x}{x}$, et cherchant si cette fonction peut prendre deux fois la même valeur pour des valeurs différentes m et x de la variable.

La dérivée de $y = \frac{\log x}{x}$ est $y' = \frac{\log e - \log x}{x^2}$ (*).

Nous supposerons, par exemple, que les logarithmes soient les logarithmes vulgaires; alors y' sera positif, lorsque x variera de o à e, il sera nul pour $x = e$, et il sera négatif lorsque x variera de e à ∞.

Ainsi y décroît lorsque x varie de o à e, il est maximum pour $x = e$, et il décroît lorsque x varie de e à ∞, et nous aurons

$$\begin{array}{ll} x = 0, & y = -\infty, \\ x = 1, & y = 0, \\ x = e, & y = \frac{\log e}{e} \text{ maximum}, \\ x = \infty, & y = 0. \end{array}$$

Ainsi $\frac{\log x}{x}$ prend deux fois la même valeur, lorsque x varie de e à ∞, et l'équation

$$x^m = m^x$$

admettra deux solutions, lorsque m sera plus grand que 1; si m est < 1, il n'y aura que la solution $x = m$.

La suite prochainement.