Poudra

Propositions diverses sur l'hyperboloïde à une nappe. Construction d'une surface du quatrième ordre passant par huit points

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 158-162

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__158_1>

PROPOSITIONS DIVERSES SUR L'HYPERBOLOIDE A UNE NAPPE.

Construction d'une surface du quatrième ordre passant par huit points;

Par M. POUDRA.

1°. Par trois droites de l'espace, on peut faire passer un hyperboloïde à une nappe et on n'en peut faire passer qu'un seul.

2°. Par deux droites et trois points de l'espace, on peut faire passer un hyperboloïde et on peut n'en faire passer qu'un seul.

3°. Par une droite et six points de l'espace, on peut faire passer un hyperboloïde et on n'en peut faire passer qu'un seul.

4°. Par trois droites dont l'une s'appuie sur les deux autres et par deux points de l'espace, on peut faire passer un hyperboloïde et on n'en peut faire passer qu'un seul.

5°. Par quatre droites dont deux s'appuient sur les deux autres et par un point de l'espace, on peut faire

(*) MM. Marquet, candidat à l'École Normale supérieure, et Chanson ont envoyé des solutions de la question 422.

passer un hyperboloïde et on n'en peut faire passer qu'un seul.

6°. Deux hyperboloïdes se coupent généralement suivant une courbe du quatrième ordre.

7°. Deux hyperboloïdes ayant une génératrice commune se coupent suivant une courbe du troisième ordre ayant cette génératrice pour asymptote.

8°. Deux hyperboloïdes ayant deux génératrices communes se coupent suivant deux autres droites qui sont toutes deux réelles ou toutes les deux imaginaires. En effet, tout plan sécant donne lieu à deux sections coniques qui ont généralement quatre points d'intersection; à chacun de ces points correspond une génératrice commune.

9°. Quatre points a, b, c, d de l'espace donnent lieu aux trois quadrilatères gauches $abcd$, $abdc$, $adbc$. Un cinquième point e détermine donc (5) trois hyperboloïdes qui, deux à deux, ayant deux génératrices communes, se couperont encore suivant deux autres droites.

10°. Cinq points a, b, c, d, e déterminent quinze hyperboloïdes qui deux à deux ont quatre droites communes.

Considérons un quadrilatère $abcd$ formé par les deux droites ab, cd et les deux droites ad, bc qui s'appuient sur les deux premières. Soit un cinquième point e variable. A chaque position de ce point e correspondra un seul hyperboloïde, de sorte que pour diverses positions de ce point, nous aurons divers hyperboloïdes; nous appellerons *faisceau* d'hyperboloïdes cette série de surfaces ayant pour *base* commune le quadrilatère $abcd$. Si l'on coupe ce faisceau d'hyperboloïdes par un plan, on obtiendra un *faisceau* de coniques passant par les quatre points communs où ce plan coupe les quatre génératrices communes ab, cd, ad, bc. Ce faisceau de coniques a pour fonction anharmonique le rapport anharmonique des tangentes à quatre de ces courbes en un point quelconque de leur intersection. Ce rapport anharmonique sera égal à celui des quatre plans passant par ces quatre tangentes et par la génératrice commune qui passe par ce point. Il en résulte que le rapport anharmonique des quatre tangentes sera le même que celui des quatre plans tangents en ce point. Ce rapport sera le même quel que soit le plan sécant; nous l'appellerons ainsi la *fonction anharmonique* du faisceau d'hyperboloïdes (*).

Soient trois hyperboloïdes passant par les deux droites communes ab, cd et successivement par les trois points e_1, e_2, e_3. Le plan E passant par les trois points coupera les trois hyperboloïdes suivant trois coniques passant par les points d'intersection du plan avec les deux droites ab, cd et deux autres génératrices (9).

Soient encore trois autres hyperboloïdes passant successivement par les trois mêmes points et par deux droites communes $a'b'$, $c'd'$. Le plan E les coupera aussi suivant trois coniques.

Imaginons deux systèmes de coniques homographiques relativement aux trois premières coniques et aux trois secondes coniques. Ces deux systèmes se couperont, d'après un théorème connu, suivant une courbe du quatrième degré passant par onze points connus : 1° les trois positions primitives e_1, e_2, e_3, et 2° les huit points où le plan E coupe les huit génératrices ab, dc, ad, bc, $a'b'$, $d'c'$, $a'd'$, $b'c'$, et chaque point de cette courbe sera une position du point e par lequel passent deux génératrices de deux hyperboloïdes homologues.

Tout autre plan sécant donnera lieu de même à deux faisceaux homographiques de coniques, l'un ayant pour

(*) *Voir* t. XII, p. 361. TM.

base les quatre points d'intersection de ce plan avec les quatre génératrices ab, cd, ad, bc, et l'autre par les quatre points résultant de l'intersection de ce même plan avec les quatre génératrices $a'b'$, $c'd'$, $a'd'$, $b'c'$. Mais ensuite chaque position du point e dans le plan E donne lieu à deux génératrices qui, coupées par le nouveau plan, donneront deux points dont l'un appartiendra à une conique d'un faisceau et l'autre à la conique homologue dans l'autre. La courbe d'intersection de ces deux faisceaux sera donc généralement une courbe du quatrième ordre.

A chaque conique correspond un hyperboloïde. On a donc aussi deux faisceaux homographiques d'hyperboloïdes.

L'intersection des deux faisceaux homographiques d'hyperboloïdes sera une surface du quatrième ordre, laquelle semble intéressante à étudier.

1°. Par son intersection avec un plan quelconque, elle peut donner lieu à une très-grande variété de courbes planes du quatrième ordre.

2°. Cette surface passe par les huit droites ab, cd, ad, bc, $a'b'$, $c'd$, $a'd'$, $b'c'$.

3°. Si le plan sécant passe par une des huit arêtes ci-dessus, la section sera une courbe du troisième ordre et l'arête ci-dessus en sera une asymptote.

4°. Si le plan sécant passe par deux génératrices telles que ab, bc qui se rencontrent en b, ce plan sera d'abord un plan tangent à la surface en ce point, et la courbe d'intersection sera une section conique. Il y aura donc huit plans qui donneront des sections coniques.

5°. Tout plan sécant parallèle à une des arêtes donnera une courbe du quatrième ordre ayant deux points à l'infini dans la direction de l'arête.

6°. Si le plan sécant est parallèle à deux arêtes, la courbe aura donc quatre points à l'infini.

7°. Si les huit points d'intersection du plan E et des huit génératrices étaient sur une même conique ainsi que les points e_1, e_2, e_3, alors la surface du quatrième ordre se changerait en deux hyperboloïdes.