J. GROUVELLE

Solution de la question 433

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 285-288

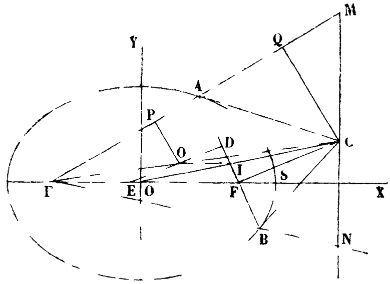
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__285_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 433

(voir p 185),

PAR M. J. GROUVELLE,
Elève du lycee Louis-le-Grand (classe de M Vieille).

Trouver le lieu des centres des cercles inscrits aux triangles ayant pour sommet l'un des foyers d'une conique et pour base une corde passant par l'autre foyer. Le centre est sur la parallèle à l'axe focal menée par le milieu de la corde.



1. *Ellipse*. Soit AB une corde passant par le foyer F. En menant par le milieu I de cette corde une parallèle à l'axe focal, on aura une droite qui contiendra le centre du cercle inscrit au triangle ABF'.

En effet, les tangentes BC et AC aux extrémités de la corde AB viennent concourir en C sur la directrice MN, et, de plus, ces tangentes étant bissectrices des angles MAF, NBF, le point C est donc également distant de F'A, F'B et, par conséquent, la droite F' C est bissectrice de l'angle AF' B. Donc le centre du cercle inscrit se trouve sur cette droite en un point O' par exemple.

Abaissons les perpendiculaires O'P et O'D sur les côtés F'A et AB. Prolongeons O'D jusqu'à sa rencontre en E avec l'axe focal. Les quadrilatères F'EO'P, F'FCQ sont semblables ; or

$$CF = CQ,$$

donc

$$O'E = O'P = O'D;$$

ainsi O' est le milieu de DE. Le point D est le point de contact du cercle inscrit au triangle F'AB, et, d'après une propriété connue, FC est perpendiculaire sur AB. Il en résulte que le point F est le point de contact du cercle ex-inscrit au triangle ABF', et que l'on a

$$AD = BF.$$

Le diamètre OC conjugué à la corde AB la divise en I parties égales ; donc I est le milieu de DF, et O' étant le milieu de DE, il s'ensuit que la droite O'I est parallèle à l'axe focal.

Prenons pour axes de coordonnées ceux de l'ellipse.

La droite F'C a pour équation

$$y = m(x + c).$$

Les coordonnées du point C, pôle de AB, sont donc

$$x = \frac{a^2}{c},$$

$$y = m\frac{a^2 + c^2}{c}.$$

Ainsi le lieu du cercle ex-inscrit qui touche la corde mobile est la directrice.

La polaire AB aura donc pour équation

$$m(a^2 + c^2)y + b^2x = b^2c.$$

Le point I, milieu de AB, se trouve sur le diamètre OC dont l'équation est

$$y = \frac{a^2 + c^2}{a^2} mx.$$

Eliminant x entre les équations de OC et de AB, on trouve pour ordonnée du point I

$$y = \frac{mb^2 c\,(a^2 + c^2)}{m^2 (a^2 + c^2)^2 + a^2 b^2}.$$

Telle est l'ordonnée du point I, et, par conséquent, l'équation de la parallèle O′I à l'axe de l'ellipse.

Or, d'après ce qui a été démontré plus haut, cette droite contient le centre du cercle inscrit. D'ailleurs la droite F′C le contient aussi. Donc pour avoir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer l'indéterminée m entre l'équation de O′I et celle de F′C.

Exécutant cette opération, on trouve

$$y^2 (a^2 + c^2)^2 + a^2 b^2 x^2 + b^4 cx - b^2 c^4 = 0,$$

équation qui représente une ellipse dont un des axes est l'axe des x et l'autre parallèle à l'axe des y. Sous la première forme, on voit à priori que l'équation du lieu est vérifiée pour

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = -c,$$

c'est-à-dire que le point F′ est un point du lieu.

La construction ne présente aucune difficulté.

2. *Hyperbole.* Il suffit de changer $+ b^2$ en $- b^2$; ainsi le lieu cherché est une hyperbole.

3. *Parabole.* Transportons l'origine au sommet en changeant x en $x + a$.

L'équation était

$$(a^2 + c^2)^2 y^2 + a^2 b^2 x^2 + b^4 cx - b^2 c^4 = 0;$$

elle devient, après le transport de l'origine,

$$(a^2+c^2)^2 y^2 + a^2 b^2 x^2 + 2a^3 b^2 x + a^4 b^2 + b^4 cx + acb^4 - b^2 c^4 = 0.$$

Divisant les deux membres par a^4, il vient

$$\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right) y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 + 2 \cdot \frac{b^2}{a} x + b^2 + \frac{b^4 c}{a^4} x + \frac{b^4}{a^2}\frac{c}{a} - \frac{b^2 c^4}{a^4} = 0.$$

Passant aux limites, on obtient

$$4y^2 + 2px + 3p^2 = 0,$$

parabole dont le sommet a pour abscisse $-\frac{3}{2}p$ et dont le paramètre est $-\frac{p}{4}$.

M. L. G. (de Liége) fait observer : 1° que la droite O'I rencontre CF en un point N point de rencontre des trois hauteurs du triangle CAB; 2° que les trois points O', I, N décrivent des ellipses ayant des petits axes égaux.