L. BRAULT

Solution de la question 440

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 296-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__296_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 440

(voir page 187);

PAR M. L. BRAULT,
Élève de l'institution Barbet.

Démontrons l'identité

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{a_0(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{a_1}{a_0(a_0+a_1)}$$
$$+\frac{a_2}{(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)}$$
$$+\frac{a_3}{(a_0+a_1+a_2)(a_0+a_1+a_2+a_3)}+\ldots$$
$$+\frac{a_n}{(a_0+a_1+\ldots+a_{n-1})(a_0+a_1+\ldots+a_n)}$$

(OSCAR WERNER.)

D'abord

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{a_1+a_2}{a_0(a_0+a_1+a_2)}&=\frac{a_1}{a_0(a_0+a_1)}\\&\quad+\frac{a_2}{(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)}.\end{aligned}\right.$$

Une simple transformation rend le second membre identique au premier. Cela posé, si l'on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{p-1}}{a_0(a_0+a_1+\ldots+a_{p-1})}=\frac{a_1}{a_0(a_0+a_1)}\\&+\frac{a^2}{(a_0+a_1)(a_0+a_1+a_2)}+\ldots\\&+\frac{a_{p-1}}{(a_0+a_1+\ldots+a_{p-2})(a_0+\ldots+a_{p-1})},\end{aligned}\right.$$

on aura aussi

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{a_0(a_0 + a_1 + \ldots + a_p)} = \frac{a_1}{a_0(a_0 + a_1)} \\ &+ \frac{a_2}{(a_0 + a_1)(a_0 + a_1 + a_2)} + \ldots \\ &+ \frac{a_p}{(a_0 + \ldots + a_{p-1})(a_0 + \ldots + a_p)}. \end{aligned} \right.$$

En effet, l'égalité (2) étant supposée prouvée, l'égalité (3) peut s'écrire (en posant $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$)

$$(4)\quad \frac{A + a_p}{a_0(a_0 + A + a_p)} = \frac{A}{a_0(a_0 + A)} + \frac{a_p}{(a_0 + A)(a_0 + A + a_p)}.$$

Mais cette égalité (4), de même forme que l'égalité (1), se démontre de la même manière. Donc la formule étant vraie pour $p = 3$, subsiste donc pour $p = 4$, et ainsi de suite.

C. Q. F. D.

MM. Laquière (lycée Saint-Louis), F. Farjou, lycée de Saint-Omer (classe Souillart) ont résolu la question de la même manière.