DE BLERZY

Invariants

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 301-305

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__301_1>

INVARIANTS ;

PAR M. DE BLERZY,
Directeur des lignes télegraphiques à la Rochelle.

---

1. On lit, page 200 de la *Théorie des déterminants*, du Dr Brioschi (traduction Combescure) que les invariants φ d'une fonction

$$f_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n \tag{1}$$

doivent vérifier les équations différentielles

$$\sum_{i=0}^{i=n} i a_{i-1} \frac{d\varphi}{d_{ai}} = 0, \tag{2}$$

et

$$\sum_{i=0}^{i=n} i a_{n-i+1} \frac{d\varphi}{da_{n-i}} = 0. \tag{3}$$

La seconde de ces équations différentielles par sa texture et par son mode de formation est symétrique de la première par rapport à (a_i, a_{n-i}), c'est-à-dire qu'elle se déduit de la première par la substitution de a_{n-i} à a_i, pourvu que φ soit symétrique. La condition de symétrie mise à l'équation (2) suffit donc pour caractériser les invariants.

Le savant traducteur de l'ouvrage cité ajoute :

« M. Cayley a prouvé qu'une seule équation différentielle jointe à la condition d'*homogénéité* peut remplacer les deux équations dont il s'agit. » Cette homogénéité doit probablement s'étendre tant aux indices qu'aux exposants.

2. Une fonction paire f_{2m} a un invariant du 2ᵉ degré qui est

$$(4)\quad {}^{*}\mathrm{I}_{2m} = a_0\, a_{2m} - 2m\,.\,a_1\, a_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1.2}\, a_2\, a_{2m-2} - \ldots,$$
$$\pm \frac{1}{2}\cdot\frac{2m\ldots(m+1)}{1.2\ldots m}\, a_m^2.$$

I_{2m} est symétrique et satisfait l'équation (2); la vérification est facile.

3. Une fonction impaire f_{2m+1} a un invariant 4ᵉ degré qui est

$$(5)\qquad \mathrm{I}_{2m+1} = \left(\sum_{i=0}^{i=2m+1} a_i \frac{d\mathrm{I}_{2m}}{da_{i-1}}\right)^2 - 4\,\mathrm{I}_{2m}\,\mathrm{I}_{2m},$$

I_{2m} étant l'invariant du 2ᵉ degré de

$$f_{2m}(a_0, a_1, \ldots, a_{2m})(x, y)^{2m},$$

I'_{2m} étant l'invariant du 2ᵉ degré de

$$f_{2m}(a_1, a_2, \ldots, a_{2m+1})(x, y)^{2m}.$$

On peut écrire cet invariant sous la forme suivante :

$$(6)\quad \mathrm{I}_{2m+1} = \left(\begin{array}{l} a_0\, a_{2m+1} - \alpha_1\ \ a_1\, a_{2m} \\ + \alpha_2\,.\,a_2\ a_{2m+1} + \ldots \\ \pm \alpha_i\,.\,a_i\ a_{2m-i+1} \ldots \pm \alpha_m\,.\,a_m\, a_{m+1} \end{array}\right)^2 - 4\,\mathrm{I}_{2m}\,\mathrm{I}'_{2m},$$

où α_i se déduit de α_{i-1} par la formule

$$i\alpha_i = (2m - i + 2)\,\alpha_{i-1} - 2\,.\,\frac{2m\ldots(2m-i+2)}{1.2\ldots(i-1)},$$

et $\alpha_1 = 2m - 1$.

(*) I_{2m} c'est φ. Tm.

I_{2m+1} est symétrique sous les deux formes que nous venons de lui donner, et la vérification de l'équation différentielle (2) s'en fait aisément en ayant égard à

$$\sum_{i=0}^{i=2m} i a_{i-1} \frac{d I_{2m}}{d a_i} = 0.$$

4. La fonction paire f_{2m} a un invariant du degré $m+1$ qui est

$$(7) \qquad I_{2m+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1, \ldots, & a_m, \\ a_1 & a_2, \ldots, & a_{m+1}, \\ a_2 & a_3, \ldots, & \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m, & a_{m+1}, \ldots, & a_{2m}, \end{vmatrix} \quad \text{(à démontrer).}$$

5. Il serait bon que les invariants fussent toujours écrits d'une manière uniforme, par exemple, sous la forme que leur donnent les formules ci-dessus. En employant la notation habituelle (*), on a, pour le 2^e degré

$$I_2 = ac - b^2 \quad \text{ou} \quad I_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix};$$

pour le 3^e degré,

$$I_3 = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2);$$

pour le 4^e degré,

$$I_4 = ae - 4bd + 3c^2,$$

et

$$I_4 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = ace + 2bcd - b^2e - ad^2c^3;$$

pour le 5^e degré,

$$I_6 = (af - 3be + 2cd)^2 - 4(ac - 4bd + 3c^2)(bf - 4ee + 3d^2).$$

(*) Alors on remplace a_0 par a, a_1 par b, a_2 par c, a_3 par d, etc. TM.

Les équations différentielles de condition sont, pour le 5^e degré,

$$a\frac{dI}{db}+2b\frac{dI}{dc}+3c\frac{dI}{dd}+4d\frac{dI}{de}+5e\frac{dI}{df}=0,$$

et

$$5b\frac{dI}{da}+4c\frac{dI}{db}+3d\frac{dI}{dc}+2e\frac{dI}{dd}+f\frac{dI}{de}=0.$$

En vérifiant, au moyen de ces équations, l'invariant I_8 que nous venons d'écrire, on verra clairement que la condition de symétrie peut être substituée à l'une d'elles.

Note du Rédacteur.

Premier exemple. Soit $n=4$; par conséquent $m=2$. On a

$$f_4=a_1x^4+4a_2x^3y+6a_3x^2y^2+4a_4xy^3+a_5y^4.$$

Premier invariant.

$$\varphi=I_4=a_0a_4-4a_1a_3+6a_2^2-3a_2^2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2.$$

L'équation (2) développée est

$$(2)\qquad a_0\frac{d\varphi}{da_1}+2a_1\frac{d\varphi}{da_2}+3a_2\frac{d\varphi}{da_3}+4a_3\frac{d\varphi}{da_4}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1}=-4a_3;\quad \frac{d\varphi}{da_2}=6a_2;\quad \frac{d\varphi}{da_3}=-4a_1;\quad \frac{d\varphi}{da_4}=a_0;$$

faisant les substitutions, l'équation (2) se vérifie.

Deuxième invariant.

$$\varphi=I_4=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_1^4a_4-a_0a_2^3-a_2^3,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1}=2(a_2a_3-a_1a_4);\quad \frac{d\varphi}{da_2}=a_0a_4+2a_1a_3-3a_2^2;$$

$$\frac{d\varphi}{da_3}=2(a_1a_2-a_0a_3);\quad \frac{d\varphi}{da_4}=a_0a_2-a_1^2;$$

les substitutions vérifient l'équation (2).

Deuxième exemple :

$n = 3; \quad m = 1;$

$f_3 = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y_2 + a_3;$

$f_2 = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2; \quad f'_2 = a_1 x^2 + 2 a_2 xy + a_3 y^2;$

$I_2 = a_0 a_2 - a_1^2; \quad I'_2 = a_1 a_3 - a_2^2;$

$$I_3 = \left(a_1 \frac{dI_2}{da_0} + a_2 \frac{dI_2}{da_1} + a_3 \frac{dI_2}{da_2} \right)^2 - 4 I_2 I'_2,$$

c'est l'équation (5) développée

$$\frac{dI_2}{da_0} = a_2; \quad \frac{dI_2}{da_1} = -2 a_1; \quad \frac{dI_2}{da_2} = a_0.$$

Substituant, on trouve

$$I_3 = (a_0 a_3 - a_2 a_1)^2 - 4 (a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) = \varphi,$$

L'équation (2) développée est

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2 a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3 a_2 \frac{d\varphi}{da_3} = 0.$$

Faisant les substitutions, elle se vérifie de même pour I_3.
