J.-Ch. Dupain

Solution de la question 314

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 315-318
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__315_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 314

(voir t. XV, p. 27);

PAR J.-CH. DUPAIN.

Construire la courbe à équation polaire

$$\rho^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

La forme générale se reconnaît assez bien au moyen de l'équation; mais il est plus commode pour certains détails de prendre les coordonnées rectangulaires

$$y^4(c^2-1)-(2-c^2)x^2y^2-x^4+1=0.$$

En suivant les méthodes ordinaires de discussion, on arrive aux résultats suivants:

Il est inutile de tenir compte des valeurs négatives de ρ pourvu que φ varie de 0° à 360 degrés.

La courbe est symétrique par rapport aux axes coordonnés; il suffit donc d'en étudier le quart.

Il y a cinq cas principaux à distinguer :

1°. $c^2<1$. La courbe est fermée; elle présente l'aspect d'une ellipse dont le petit axe serait dirigé suivant l'axe polaire. Le plus petit rayon vecteur est l'unité, le plus grand $\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$.

2°. $c^2=1$. On peut écrire

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi}}.$$

l'aspect de la courbe est celui d'une branche de conchoïde $\left(\rho=\dfrac{a}{\cos\varphi}+b\right)$ qui serait répétée symétriquement par rapport à sa directrice $\left(\rho=\dfrac{a}{\cos\varphi}\right)$. L'axe des y est une asymptote commune aux branches de la courbe; il y a quatre inflexions.

3°. $2>c^2>1$. Il y a deux asymptotes ayant pour équations

$$\sin\varphi=\pm\frac{1}{a}\quad\text{ou}\quad y=\frac{x}{\pm\sqrt{c^2-1}}.$$

L'ordonnée positive de la courbe est plus petite que celle de l'asymptote. L'angle asymptotique qui renferme chaque branche de courbe est obtus.

y commence à être réel quand

$$x^4 = \frac{4(c^2-1)}{c^4},$$

et alors

$$y = \pm \frac{\sqrt{2-c^2}}{c},$$

la tangente est parallèle aux ordonnées. Quand x augmente, y prend quatre valeurs égales deux à deux, sauf le signe, jusqu'à ce que $x=1$; y n'a plus que trois valeurs

$$+\sqrt{\frac{2-c^2}{c^2-1}},\quad 0,\quad -\sqrt{\frac{2-c^2}{c^2-1}}.$$

Le point $(1,0)$ est un sommet de la courbe. L'ordonnée n'a plus ensuite que deux valeurs de signes contraires, et la courbe se rapproche de ses asymptotes. Il y a dans le voisinage du sommet une inflexion pour chaque quart de la courbe dont l'aspect est celui des branches infinies de la courbe du *Diable* $(y^4 - x^4 - 96\, a^2 y^2 + 100\, a^2 x^2 = 0)$ étudiée par Lacroix dans ses *Éléments de calcul différentiel,* et par MM. Briot et Bouquet (*Géométrie analytique*, 2^e^ édition, p. 197).

4°. $c^2 = 2$. L'équation se simplifie et peut s'écrire

$$\rho^2 = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \quad \text{ou} \quad y^4 - x^4 = -1.$$

La courbe a le même aspect que l'hyperbole équilatère $(y^2 - x^2 = -1)$ qui a mêmes asymptotes qu'elles, mêmes sommets et mêmes tangentes aux sommets.

5°. $c^2 > 2$. L'aspect général de la courbe est encore celui d'une hyperbole ayant les mêmes asymptotes, mêmes sommets, mêmes tangentes aux sommets. L'angle des asymptotes est aigu.

L'aire de la courbe est une fonction elliptique de première espèce

$$\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \mathrm{F}(c, \varphi).$$

La différentielle développée donne une série convergente lorsque $c \sin \varphi < 1$,

$$\frac{1}{2} d\varphi \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} c^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} c^4 \sin^4 \varphi + \ldots \\ + \frac{1.3.5\ldots, 2p - 1}{2.4.6\ldots, 2p} c^{2p} \sin^{2p} \varphi \ldots \end{array} \right\}.$$

L'intégrale générale n'est pas simple; mais on peut remarquer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2p - 1}{2p},$$

et, par suite,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= \pi \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{1}{2} c\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4} c^2\right)^2 + \ldots \\ + \left[\frac{1.3.5\ldots,(2p - 1)}{2.4.6\ldots 2p} c^p\right]^2 + \ldots \end{array} \right\}.$$

Cette série n'est convergente que si c est inférieur à l'unité.

Note du Rédacteur. Il est urgent de diriger l'attention des élèves sur cette courbe, une des plus importantes de l'époque actuelle, d'après l'emploi de son aire dans les sciences physiques. Nous en dirons autant de la courbe *gamma*.