Nouvelles annales de mathématiques

FAURE

Solution de la question 279

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 347-348
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__347_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 279

(voir t XII, p 327),

PAR M. FAURE.

ABC est un triangle donné, F un point fixe dans le plan du triangle, une droite variable AD passe par le point A et rencontre le côté BC en D, point variable. Construisons une conique ayant pour foyer F, et touchant les trois côtés du triangle ABD. Soit E le point de contact sur AD, construisons une autre conique touchant les trois côtés du triangle ACD, soit E′ le point de contact sur AD, l'angle EFE′ est constant.

Je suppose que la première conique soit une ellipse, la seconde sera une hyperbole en général. Soient G le point où l'ellipse touche le côté BC, G′ le point où l'hyperbole touche le même côté. Je joins le point F aux points A, B, C, D, G, G′, E, E′. Les angles BFG, G′ FC sont égaux, puisque chacun d'eux est égal à l'angle AFD, sous lequel la ligne AD, interceptée entre les deux tangentes fixes AB, BC ou AC et BC, est vue du foyer F. Ajoutons à chacun de ces angles égaux l'angle GFC, j'aurai $GFG' = BFC$. D'où l'on voit que l'angle GFG' a une valeur constante. Or DF étant bissectrice de l'angle GFE et de l'angle $G''FE'$ (G'' étant un point pris sur le prolongement de FG'), j'ai

$$DFG = DFE, \quad DFG'' = DFE',$$

d'où

$$DFG'' - DFG = DFE' - DFE \quad \text{ou} \quad GFG'' = EFE':$$

mais GFG'' est égal à $180^0 - GFG' = 180^0 - BFC$, c'est-à-dire a une valeur constante ; il en est donc de même de EFE', et l'on voit de plus qu'elle est la valeur de cette constante.

La démonstration serait analogue pour toute autre position du point F.