NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

Notes sur divers sujets

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 360-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__360_1>

NOTES SUR DIVERS SUJETS.

Plusieurs questions m'ont été adressées par des abonnés aux *Nouvelles Annales*. Les unes appartiennent entièrement aux mathématiques élémentaires ; les autres se rapportent à des considérations d'un ordre différent, elles sont relatives aux modifications apportées par le Programme *officiel* dans l'enseignement scientifique des lycées. Je réponds d'abord aux premières :

1. *Déterminer les angles d'un triangle dont les côtés sont des multiples du rayon du cercle inscrit, et faire voir que si l'on prend pour unité le rayon de ce cercle, la surface du triangle est exprimée par un nombre en-*

tier dont le cube est égal à la somme des cubes des trois nombres qui représentent les côtés du triangle.

Soient r le rayon du cercle inscrit; a, b, c, les côtés; p, le demi-périmètre; s, la surface; x, y, z, les rapports des côtés a, b, c au rayon r: on aura

$$a = rx, \quad b = ry, \quad c = rz, \quad p = \frac{1}{2} r(x + y + z);$$

d'où

$$p - a = \frac{1}{2} r(y + z - x),$$

$$p - b = \frac{1}{2} r(x + z - y),$$

$$p - c = \frac{1}{2} r(x + y - z).$$

Mais, d'après une formule connue,

$$r^2 = \frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p};$$

donc

$$r^2 = \frac{r^2}{4} \cdot \frac{(y + z - x)(x + z - y)(x + y - z)}{(x + y + z)}:$$

équation qui revient à

$$(1) \quad (y + z - x)(x + z - y)(x + y - z) = 4(x + y + z).$$

Les côtés a, b, c étant, par hypothèse, des multiples du rayon r, les rapports x, y, z, de ces côtés au rayon, sont nécessairement des nombres entiers, et, par conséquent, les expressions

$$(y + z - x), \quad (x + z - y), \quad (x + y - z), \quad (x + y + z)$$

représentent aussi des nombres entiers, qui doivent être positifs, parce que les valeurs des différences $p - a$, $p - b$, $p - c$ sont, comme on sait, des quantités positives.

De plus, il est facile de reconnaître que chacun des quatre nombres

$$(y+z-x),\quad (x+z-y),\quad (x+y-z),\quad (x+y+z),$$

est exactement divisible par 2.

En effet, l'égalité (1) montre que le produit des trois premiers est un multiple de 4; d'ailleurs en additionnant deux à deux ces trois nombres, on obtient pour sommes $2z$, $2x$, $2y$; il faut donc que chacun d'eux soit pair. Il en est de même du quatrième $(x+y+z)$, car il est égal à la somme des trois premiers.

Cela établi, posons

$$(2)\qquad y+z-x=2X,$$
$$(3)\qquad z+x-y=2Y,$$
$$(4)\qquad x+y-z=2Z;$$

il en résulte

$$x+y+z=2(X+Y+Z),$$

et par suite l'équation (1) se réduit à

$$(5)\qquad XYZ=X+Y+Z.$$

On voit ainsi que la détermination des rapports x, y, z dépend de la résolution de ce problème :

Trouver trois nombres entiers et positifs, X, Y, Z, *dont la somme égale le produit.*

Il est clair que les nombres cherchés X, Y, Z ne peuvent être égaux entre eux, car leur égalité donnerait

$$X^3=3X,\quad \text{ou}\quad X=\sqrt{3}.$$

Soit X le plus grand de ces trois nombres, on aura

$$X+Y+Z<3.X;$$

puis, en ayant égard à l'équation (5),

$$XYZ<3.X,\quad YZ<3.$$

De cette dernière inégalité il faut conclure $YZ = 2$, ou $YZ = 1$, puisque Y et Z sont des nombres entiers et positifs.

Mais l'équation $YZ = 1$ n'admet pour solution, entière et positive, que $Y = 1$, $Z = 1$. Et cette solution ne peut convenir, parce qu'elle conduit à $X = X + 2$. Donc $YZ = 2$, ce qui exige que l'un des deux nombres Y, Z, par exemple Y, soit égal à 2, et l'autre Z, égal à l'unité. La valeur correspondante de X, déterminée par l'équation (5), est évidemment le nombre 3.

En remplaçant X, Y, Z par 3, 2, 1, les équations (2), (3), (4) deviennent

$$y + z - x = 6,$$
$$z + x - y = 4,$$
$$x + y - z = 2,$$

et en additionnant deux à deux ces dernières, on trouve

$$z = 5, \quad y = 4, \quad x = 3;$$

d'où

$$a = 3r, \quad b = 4r, \quad c = 5r.$$

Ces valeurs de a, b, c, donnant $c^2 = b^2 + a^2$, l'angle C, opposé au côté c, est droit. On a

$$\sin B = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}, \quad \sin A = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}:$$

les trois angles du triangle sont ainsi déterminés.

En prenant pour unité le rayon r du cercle inscrit, les valeurs numériques des trois côtés a, b, c seront 3, 4, 5. La surface du triangle, qui a pour mesure la moitié du produit des côtés de l'angle droit, sera exprimée par le nombre 6. Or

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3;$$

donc

$$s^3 = a^3 + b^3 + c^3.$$

C'est ce qu'il fallait faire voir.

2. *Diviser un angle donné α positif et moindre que* 180 *degrés en* n *parties telles, que le produit de leurs sinus soit un maximum.*

Ce maximum correspond à l'égalité des parties. Car, en supposant d'abord $n = 2$, nommons a, b les deux parties; on aura

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos\alpha].$$

Le maximum de $\cos(a-b) - \cos\alpha$, est évidemment $1 - \cos\alpha$. L'égalité $\cos(a-b) = 1$ donne $a = b$, parce que a et b sont positifs et moindres que 180 degrés.

Du cas particulier $n = 2$, on passe au cas général au moyen d'un raisonnement qui est bien connu.

3. *Quel est le minimum du rapport $\frac{R}{r}$ des rayons de deux cercles, l'un circonscrit à un triangle, et l'autre inscrit?*

Soient A, B, C et s les trois angles et la surface du triangle; on sait que

$$R^2 = \frac{s}{2 . \sin A . \sin B . \sin C}$$

et

$$r^2 = s . \text{tang}\frac{1}{2}A \ \text{tang}\frac{1}{2}B . \text{tang}\frac{1}{2}C,$$

d'où

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{16 . \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) . \sin^2\left(\frac{B}{2}\right) . \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)};$$

il en résulte

$$(1) \qquad \frac{R}{r} = \frac{1}{4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right)}.$$

Or, le maximum du produit des sinus des trois angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, dont la somme est 90 degrés, s'obtient, comme on vient de le voir (2), en posant

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = 30^{\circ},$$

ce qui donne

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8};$$

l'égalité (1) devient alors

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2,$$

par conséquent, le nombre 2 est le *minimum* cherché.

4. *Déterminer le maximum du produit des tangentes de* n *angles positifs* a, b, c, d, *etc., dont la somme,* α, *est donnée : on suppose que la somme de deux quelconques de ces angles est moindre que* 90 *degrés.*

Les inégalités supposées

$$a + b < 90^{\circ}, \quad c + d < 90^{\circ}, \quad \ldots,$$

donnent

$$\operatorname{tang} a \cdot \operatorname{tang} b < 1, \quad \operatorname{tang} c \cdot \operatorname{tang} d < 1 \ldots;$$

et de là on peut conclure que le produit p des tangentes des angles a, b, c, d, etc., est toujours moindre que l'unité. En effet, lorsque n est pair, p se forme du produit des $\frac{n}{2}$ nombres

$$\text{tang}\, a . \text{tang}\, b, \quad \text{tang}\, c . \text{tang}\, d, \ldots,$$

qui sont chacun compris entre o et 1. On a donc $p < 1$.

Si n est impair, p est le produit de tang a par un nombre tang b . tang c . tang d, etc., plus petit que l'unité, il s'ensuit

$$p < \text{tang}\, a.$$

On aura de même

$$p < \text{tang}\, b,$$

d'où

$$p^2 < \text{tang}\, a . \text{tang}\, b < 1 \quad \text{et} \quad p < 1.$$

Ainsi le produit variable p a un maximum compris entre o et 1.

Cela posé, considérons d'abord le cas particulier où $n = 2$.

Dans ce cas, on a :

$$a + b = \alpha, \quad \alpha < 90^\circ, \quad p = \text{tang}\, a . \text{tang}\, b = \frac{\sin a \; \sin b}{\cos a . \cos b}.$$

Mais

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b] = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos \alpha],$$

$$\cos a . \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)] = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos a];$$

donc,

$$p = \frac{\cos(a - b) - \cos \alpha}{\cos(a - b) + \cos \alpha} = 1 - \frac{2 \cos \alpha}{\cos(a - b) + \cos \alpha}.$$

La fraction $\frac{2 \cos \alpha}{\cos(a - b) + \cos \alpha}$ est positive, puisque l'angle α est aigu ; par conséquent le maximum de p s'obtiendra en posant

$$\cos(a - b) = 1,$$

ce qui donne

$$a = b = \frac{\alpha}{2}$$

et

$$p = \text{tang}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Quel que soit n, il faut, pour que le produit p devienne maximum, que les angles a, b, c, etc., soient égaux entre eux; on sait comment cette proposition générale se déduit du cas particulier que nous venons de considérer.

Quant à la valeur de p, correspondante à l'égalité des angles a, b, c, etc., elle est évidemment $\text{tang}^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)$. Cette valeur est moindre que l'unité, parce que $\frac{\alpha}{n}$ est moindre que la moitié d'un angle droit.

5. *Démontrer analytiquement que de tous les triangles circonscrits à un cercle donné, le plus petit en surface a ses trois angles égaux entre eux.*

Soient r le rayon du cercle, A, B, C et s les trois angles et la surface de l'un des triangles circonscrits, on aura

$$s = \frac{r^2}{\text{tang}\frac{A}{2} \cdot \text{tang}\frac{B}{2} \cdot \text{tang}\frac{C}{2}}.$$

Le minimun de s correspond au maximum du produit des tangentes des angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ dont la somme est égale à 90 degrés; donc (n° 4) lorsque s est minimum, les angles A, B, C sont égaux entre eux. C'est ce qu'il fallait démontrer. G.