NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHALLIOT

Solution de la question 446

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 447-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__447_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 446

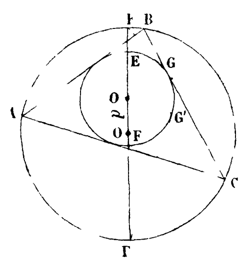
(voir page 388),

PAR M. CHALLIOT,
Elève du lycee de Versailles.

Joignons par une droite les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle; cette droite rencontre le cercle inscrit en deux points; soient s et s' les puissances de ces points relativement au cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit, on a la relation

$$ss' = r^3(4R + r).$$

(GRUNERT.)



(On admet comme connu le théorème que : *La distance des cercles inscrit et circonscrit à un triangle est moyenne proportionnelle entre le rayon du cercle circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre du cercle inscrit.*) En sorte que sur la figure, on a

$$\overline{OO'}^2 = d^2 = R(R - 2r).$$

(*Voir* t. IX, p. 216.)

Cela posé, on a *par définition*

$$s = \mathrm{EF} \times \mathrm{EF}',$$
$$s' = \mathrm{E'F} \times \mathrm{E'F'}$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$ss' = (\mathrm{EF} \times \mathrm{E'F}) \times (\mathrm{EF'} \times \mathrm{E'F'}).$$

Si des points F, F′ on mène les tangentes FG, F′G′ au cercle inscrit, il vient

$$ss' = \overline{\mathrm{FG}}^2 \times \overline{\mathrm{F'G'}}^2.$$

Or

$$\overline{\mathrm{FG}}^2 = (\mathrm{R} - d)^2 - r^2,$$
$$\overline{\mathrm{F'G'}}^2 = (\mathrm{R} + d)^2 - r^2,$$

et puisque

$$d = \sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{R} - 2r)},$$

il vient enfin

$$ss' = \left[(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r})^2 - r^2\right]\left[(\mathrm{R} + \sqrt{\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r})^2 - r^2\right].$$

Si l'on développe et que l'on effectue la multiplication indiquée, il vient, après la réduction des termes semblables,

$$ss' = r^3(4\mathrm{R} + r).$$

C. Q. F. D.

Note. MM. Saintard (de Magny), E. Descourbes, Léon Brault (institution Barbet) ont aussi résolu ce problème, et le dernier a résolu aussi le problème 451.