NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Note relative à quelques propriétés des figures homographiques dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 51-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__51_1>

NOTE

Relative à quelques propriétés des figures homographiques dans l'espace;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES (*).

THÉORÈME I. *Quelle que soit la position de deux figures homographiques dans l'espace, tous les plans de l'une qui passent par une même droite rencontrent respectivement les plans homologues de l'autre figure, suivant des droites qui engendrent un hyperboloïde à une nappe.*

Car, d'après la définition de ces figures, les plans homologues forment deux faisceaux homographiques. Donc ces plans se coupent suivant les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe (*Géométrie supérieure*, n° 411).

(*) Ces proprietes se demontrent par les formules metamorphiques

$$X = \frac{p_1}{p}, \quad Y = \frac{p_2}{p}, \quad Z = \frac{p_3}{p}$$

ou les p sont des fonctions lineaires en x, y, z. TM.

Théorème II. *Quelle que soit la position de deux figures homographiques dans l'espace, si l'on joint un à un respectivement, par des droites, des points de la première situés en ligne droite aux points homologues de la seconde, toutes ces droites envelopperont un hyperboloïde à une nappe.*

En effet, les points de la première figure étant en ligne droite, leurs homologues sont sur une seconde droite, et, d'après la définition des figures homographiques, ces droites sont divisées homographiquement par leurs points homologues. Donc les droites qui joignent ces points un à un enveloppent un hyperboloïde à une nappe (*Géométrie supérieure*, n° 410) (*).

Remarque. Les deux théorèmes qui précèdent ont été démontrés il y a longtemps par M. Chasles dans son *Mémoire sur la dualité et l'homographie*, nos 429 et 430. Ils vont servir à la démonstration de ceux qui suivent.

Théorème III. *Deux figures homographiques étant placées d'une manière quelconque dans l'espace, il existe quatre points (réels ou imaginaires) qui, étant considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde.*

En effet, prenons dans les deux figures deux triangles homologues quelconques OLP, O'L'P', et considérons deux faisceaux homographiques de plans autour des deux droites homologues OL, O'L'. Ces plans se couperont sur un hyperboloïde à une nappe H, passant par les deux droites OL, O'L' (théorème I); or cette surface passera par tout point A où coïncident deux points homologues des deux figures; car les plans OLA, O'L'A seront évidemment deux plans homologues des deux faisceaux.

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 358.

Considérons de même deux autres séries de faisceaux de plans homologues l'une autour des droites OP, O'P' et l'autre autour des deux droites LP, L'P'. Les plans correspondants des premiers faisceaux se couperont sur un hyperboloïde H' et ceux des seconds faisceaux sur un hyperboloïde H''; et ces deux surfaces passeront, comme H, par tout point A où coïncident deux points homologues des deux figures.

Les trois hyperboloïdes H, H', H'' ont une génératrice rectiligne commune, savoir, l'intersection des deux plans homologues OLP, O'L'P'. Donc, d'après un théorème cité par M. Chasles dans sa *Note sur les courbes gauches du troisième ordre* (*Comptes rendus,* 1857), ils se coupent en quatre points seulement, abstraction faite de cette génératrice, et je dis que chacun de ces quatre points jouit de la propriété d'être le point de coïncidence de deux points homologues des deux figures.

En effet, soit ω l'un de ces quatre points. Les plans OLω, O'L'ω des deux figures respectivement, sont homologues, puisqu'ils se coupent sur l'hyperboloïde H, et pareillement les plans OPω, O'P'ω, qui se coupent sur H'. Donc les droites Oω, O'ω, intersections de ces plans, sont deux droites homologues. On verrait de même que les droites Lω, L'ω, intersections respectives des plans LPω, LOω et L'P'ω, L'O'ω sont homologues. Donc enfin le point ω, considéré comme point de rencontre des droites Oω, Lω, est l'homologue du point ω, considéré comme point d'intersection des droites O'ω, L'ω. C. Q. F. D.

Remarque. Ces points remarquables, étant en nombre pair, peuvent être tous imaginaires, contrairement à ce qui a lieu pour les figures homographiques tracées sur un plan, où il y en a toujours un de réel au moins.

THÉORÈME IV. *Dans deux figures homographiques à trois dimensions, il existe quatre plans (réels ou imagi-*

naires) qui, étant considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde.

En effet, prenons deux angles trièdres homologues quelconques OLPQ, O′L′P′Q′ dont O et O′ soient les sommets correspondants, et considérons d'abord les deux arêtes homologues OL, O′L′. Les droites qui joignent deux à deux leurs points correspondants sont situées sur un hyperboloïde H (théorème II) qui touche tout plan Ω suivant lequel coïncident deux plans homologues des deux figures; car ce plan rencontre les droites OL, O′L′ en deux points correspondants. Donc il contient une génératrice de l'hyperboloïde H, et, par conséquent, il touche cette surface en un point de cette génératrice.

Considérons de même deux autres séries de divisions homographiques tracées, les unes sur OP et O′P′ et les autres sur OQ, O′Q′. Les droites qui joignent les points homologues des deux premières divisions sont situées sur un hyperboloïde à une nappe H′, et celles qui joignent les points homologues des deux autres divisions sont situées sur un hyperboloïde H″.

Les trois surfaces H, H′, H″ ont une génératrice rectiligne commune, savoir, la droite de jonction des points homologues O et O′. Donc, d'après le théorème *corrélatif* de celui de M. Chasles, cité au théorème III, ces trois surfaces n'ont en commun que quatre plans tangents, abstraction faite de ceux, en nombre infini, qu'ils ont suivant la génératrice commune OO′. Je dis que chacun de ces quatre plans jouit de la propriété d'être un plan de coïncidence de deux plans homologues des deux figures.

En effet, soit Ω l'un de ces quatre plans, et soient a, a', b, b', c, c' les points où il coupe respectivement les arêtes OL, O′L′, OP, O′P′, OQ, O′Q′ des deux angles trièdres. De ce que ce plan est tangent à chacun des trois hyperboloïdes H, H′, H″, il s'ensuit que les droites ab et $a'b'$, ac et $a'c'$, bc et $b'c'$ sont homologues deux à deux. Donc le plan Ω, considéré comme passant par les trois droites ab, ac et bc, est l'homologue du plan Ω, considéré comme passant par les trois autres droites ; ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. Ces plans remarquables, qu'on peut nommer *plans doubles* des figures homographiques, étant en nombre pair, peuvent être imaginaires ; c'est ce qui arrive quand les quatre *points doubles* du théorème III le sont eux-mêmes, et *vice versâ ;* car il est bien évident que ces plans ne sont autre chose que les quatre faces du tétraèdre dont les quatre points sont les sommets.

Théorème V. *Dans deux figures homographiques à trois dimensions, il existe six droites (réelles ou imaginaires) qui, considérées comme appartenant à la première figure, sont elles-mêmes leurs homologues dans la seconde.*

Ce théorème est une conséquence des deux qui précèdent ; ces *droites doubles* sont les arêtes du tétraèdre déterminé par les points doubles ou par les plans doubles indistinctement.