Nouvelles annales de mathématiques

Vannson

Formules fondamentales de l'analyse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 65-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__65_1>

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE;

PAR M. VANNSON.

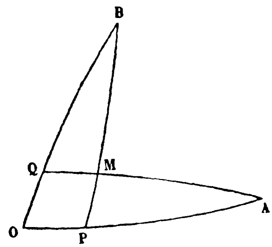
Nous nous sommes proposé, dans cet article et quelques-uns qui suivront, d'établir les formules fondamentales de l'analyse sphérique. Les personnes qui voudront étudier d'une manière plus complète cette branche d'analyse devront lire un très-bon ouvrage de M. Borgnet intitulé : *Essais d'analyse sphérique* (*). Toutefois notre marche diffère de celle de M. Borgnet en ce qu'au lieu d'employer la méthode des projections nous nous servons du calcul, en prenant pour point de départ les formules les plus usuelles de trigonométrie sphérique.

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. VI, p. 474; t. VII, p. 147 et 174. TM.

Nous insisterons sur un cas qui se présente fréquemment dans la discussion des courbes, cas dans lequel les formules générales données par M. Borgnet ne peuvent s'appliquer.

Soient deux axes obliques se coupant au point O sous un angle θ; prenons à partir du point O deux distances

FIG. 1.



OA, OB, égales à un quadrant. Pour déterminer la position d'un point quelconque M sur la sphère, il nous suffira de le joindre aux points A et B par deux arcs de grands cercles qui couperont les axes en deux points P et Q, et de nous donner les segments OP et OQ que nous appellerons les *coordonnées obliques* du point M; les points P et Q sont les projections du point M, et les points A et B se nomment *centres de projections*. Désignons les segments OP, OQ par x et y; par α l'angle que fait l'arc OM avec l'axe des x, et proposons-nous de calculer en fonction de x, y et θ les principaux lignes et angles de cette figure. La résolution du triangle AQO, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, donne

$$\operatorname{tang} A = \sin\theta \operatorname{tang} y;$$

on a de même

$$\operatorname{tang} B = \sin\theta \operatorname{tang} x,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} B} = \frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x}.$$

Si dans le triangle OMA on prend la valeur de tang OM, on trouve

$$\operatorname{tang} OM = \frac{\operatorname{tang} A}{\sin \alpha};$$

on a par analogie

$$\operatorname{tang} OM = \frac{\operatorname{tang} B}{\sin(\theta - \alpha)},$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} B} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Si dans cette formule α est constant, y et x variables, elle donne l'équation d'un grand cercle passant par l'origine et faisant un angle connu avec l'axe des x; si l'on convient de représenter pour plus de simplicité les deux tangentes par Y et X, on aura pour équation du cercle OM

$$Y = aX.$$

On peut écrire ainsi la formule (1)

$$\frac{Y}{X} = \frac{\cot MAB}{\cot MBA} = \left(\frac{\operatorname{tang} MBA}{\operatorname{tang} MAB}\right).$$

Si l'on regarde le deuxième membre comme constant, on a ainsi l'équation d'un grand cercle mené par l'origine. De là résulte ce théorème :

Le lieu des sommets des triangles sphériques ayant une base commune (AB) *et dans lesquels les tangantes des angles à la base sont dans un rapport donné est une circonférence de grand cercle passant par le pôle de la base.*

Les triangles supplémentaires donnent un théorème inverse :

Si des triangles ont un angle commun et que les tangentes des côtés qui le comprennent soient en rapport constant, le troisieme côté passera par un point fixe situé à 90 degrés du sommet de l'angle commun.

Ce dernier théorème sert à trouver graphiquement une tangente qui soit quatrième proportionnelle à trois tangentes d'arcs donnés.

Le triangle BOP donne

$$\operatorname{tang} \mathrm{BPA} = \frac{\operatorname{tang} \theta}{\cos x},$$

de même

$$\operatorname{tang} \mathrm{BQA} = \frac{\operatorname{tang} \theta}{\cos y};$$

ainsi

$$\frac{\cos y}{\cos x} = \frac{\operatorname{tang} \mathrm{P}}{\operatorname{tang} \mathrm{Q}}.$$

Si le deuxième membre est constant, cette équation donnera le lieu du point M. Il serait facile d'y reconnaître une ellipse sphérique ayant son centre au point O.

Pour fixer la position d'un point sur la sphère, on le rapporte le plus ordinairement à deux axes rectangulaires. Ainsi en géographie on prend pour axes l'équateur et le premier méridien, et le point se détermine par sa latitude et sa longitude; mais on peut aussi, au lieu de l'arc de latitude, prendre pour ordonnée la projection de cet arc sur le premier méridien. Ce second mode de détermination a l'avantage de donner des formules symétriques par rapport à x et à y, et plus faciles à comparer avec leurs analogues sur le plan. Pour distinguer l'un de l'autre ces deux systèmes de coordonnées, nous appellerons les premières *coordonnées géographiques,* et les secondes *coordonnées géométriques ;* la formule pour passer d'un système à l'autre se trouve aisément par la résolution d'un triangle rectangle ; et si l'on appelle y la latitude et Y sa projection sur le premier méridien ou axe des Y, on trouve

$$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} Y \cos x,$$

x étant la longitude du point.

Il y a un cas particulier où les coordonnées géométriques ne détermineraient pas le point. C'est quand $x = \frac{\pi}{2}$, alors Y égale aussi $\frac{\pi}{2}$, et les deux arcs perpendiculaires aux axes qui donnent en général la position du point par leur rencontre se confondent dans ce cas particulier. Il faut donc se donner la latitude du point pour fixer sa position.

Problème. *Connaissant les coordonnées d'un point rapporté à des axes obliques, trouver sa distance à l'origine.*

On a déjà trouvé (p. 67)

$$\operatorname{tang} OM = \frac{\operatorname{tang} A}{\sin \alpha},$$

or

$$\operatorname{tang} A = \sin \theta \operatorname{tang} y.$$

D'ailleurs l'équation trouvée plus haut

$$\frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$$

donne

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} y \sin \theta}{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y \cos \theta},$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tang} y \sin \theta}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 y + \operatorname{tang}^2 x + 2 \operatorname{tang} y \operatorname{tang} x \cos \theta}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de tang OM, on a

$$\text{tang}^2 \text{OM} = \text{tang}^2 y + \text{tang}^2 x + 2 \,\text{tang} y \,\text{tang} x \cos\theta$$

ou, plus simplement,

$$Y^2 + X^2 + 2XY\cos\theta = r^2,$$

X, Y, r représentant des tangentes; si r est constant, Y et X variables, on aura l'équation d'un petit cercle ayant son pôle à l'origine et rapporté à des axes obliques; si

$$\theta = 90^\circ,$$

on aura

$$Y^2 + X^2 = r^2,$$

comme sur un plan.

Problème. *Trouver l'équation d'un grand cercle qui coupe les axes à des distances connues de l'origine* (α *et* β).

Soient A et B les traces du cercle donné, prenons un point M sur ce cercle; soient P et P′ les centres de projections, N la projection de M sur l'axe des y, N′ sur l'axe des x. Le triangle AOB coupé par l'arc transversal projetant NMP donnera (*)

$$\frac{\sin(\beta - y)}{\sin y} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin \text{MB}}{\sin \text{MA}} = 1,$$

de même

$$\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{\sin \text{MA}}{\sin \text{MB}} = 1.$$

(*)
$$\text{OA} = \alpha, \qquad \text{ON}' = x,$$
$$\text{OB} = \beta, \qquad \text{ON} = y,$$
$$\beta - y = \text{BN}, \qquad \alpha - x = \text{AN}'.$$

L'équation exprime le théorème de Ptolémée sur la transversale. Tm.

Si nous multiplions ces équations membre à membre, nous trouvons, en simplifiant,

$$\frac{\tang y}{\tang 6}+\frac{\tang x}{\tang \alpha}=1,$$

ou

$$\frac{Y}{b}+\frac{X}{a}=1,$$

les lettres X, Y, a, b représentant des tangentes. La formule est démontrée pour des axes quelconques. On peut aussi l'écrire sous cette forme

$$y=Ax+b,$$

A représentant, si les axes sont rectangulaires, la cotangente en signe contraire de l'angle formé par l'axe des x avec un arc qui projetterait l'origine sur la circonférence donnée. L'équation de cet arc projetant serait donc

$$y=-\frac{1}{A}x,$$

si l'on cherche l'intersection de deux arcs, puis la distance de l'origine au point de rencontre, on trouvera, en appelant D la tangente de cette distance,

$$D=\pm\frac{b}{\sqrt{1+A^2}}.$$

D'où l'on voit que l'équation d'une circonférence de grand cercle éloignée de l'origine d'un arc D sera

$$y=Ax\pm D\sqrt{1+A^2}.$$

Si A varie, D restant le même, ce sera l'équation d'une tangente quelconque à un cercle dont le centre est à l'origine, D représentant la tangente de la distance polaire et A la cotangente en signe contraire de l'angle formé par l'axe des x et l'arc qui va du pôle au point de contact. Si l'on considère alternativement les deux signes, on aura les équations de deux tangentes menées aux extrémités du même diamètre; enfin si l'on cherche leur point de rencontre, on trouve $x = \infty$, ce qui fait voir que le point de rencontre est à 90 degrés de l'origine.

Pour achever de connaître ce point, il faut donc avoir la tangente de sa latitude: on trouve aisément qu'elle est égale à A.

Remarque. Connaissant les coordonnées du pôle d'un grand cercle, on peut en déduire la valeur de a et b. x', y' désignant les tangentes des coordonnées du pôle, on a évidemment

$$a = -\frac{1}{x'}, \quad b = -\frac{1}{y'},$$

ce qui permet de représenter une circonférence de grand cercle par l'équation

$$yy' + xx' - 1 = 0.$$

(BORGNET.)

L'équation d'une circonférence de grand cercle passant par un point donné sera évidemment

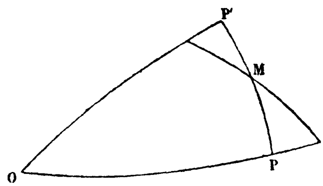
$$y - y' = A(x - x').$$

Cette équation ne s'applique pas au cas où le point donné serait à 90 degrés de l'origine, alors

$$x' = y' = \infty,$$

et il faut se servir de la latitude du point M que j'appellerai l. Pour cela, considérons le triangle POP' formé par les deux centres de projection et l'origine. Il est coupé par l'arc donné au point M (MP est égal à l), et on a par

FIG. 2.



le théorème des transversales

$$\frac{\sin l}{\sin(\theta - l)} \cdot \frac{\sin a}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = -1,$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha} = -\frac{\sin l}{\sin(\theta - l)}.$$

L'équation demandée sera donc

$$y = \mathrm{A}x + b,$$

A représentant $\frac{\sin l}{\sin(\theta - l)}$ ou simplement tang l si les axes sont rectangulaires. Si donc plusieurs circonférences ont un point commun situé à 90 degrés de l'origine, le coefficient de x sera le même dans leurs équations et ce coefficient sera la tangente de la latitude du point commun, les axes étant rectangulaires. Ce système de circonférences sera donc l'analogue d'un système de droites parallèles sur un plan.

L'équation d'une circonférence de grand cercle passant par deux points sera en général

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Si le deuxième point est à 90 degrés, l'équation sera

$$y - y' = \mathrm{A}(x - x'),$$

A désignant la tangente de la latitude du deuxième point si les axes sont rectangulaires, et, dans le cas général, $\dfrac{\sin l}{\sin(\theta - l)}$.

Nous allons faire l'application des formules précédentes à quelques problèmes et théorèmes.

Définition. Étant donnés deux points A et B sur une sphère, si l'on prend sur l'arc qui les joint un troisième point O déterminé par l'équation

$$\frac{X - x'}{x'' - X} = \frac{m}{n},$$

X, x', x'' étant les tangentes des abscisses des trois points, ce troisième point, quand le rayon de la sphère devient infini, partage évidemment la ligne AB dans le rapport de m à n. Cela posé, nous dirons, pour abréger quelques énoncés, que ce point O partage l'arc AB suivant le *rapport sphérique* de m à n. On tire de l'équation

$$X = \frac{mx'' + nx'}{m + n}.$$

On voit aisément que la même relation existe pour les ordonnées, en sorte que

$$Y = \frac{my'' + ny'}{m + n}.$$

Théorème. *Si l'on divise les trois côtés* c, b, a *d'un triangle sphérique, le premier suivant le rapport sphérique de* m *à* n, *le deuxième suivant le rapport de* p *à* m, *le troisième suivant le rapport de* n *à* p; *si l'on joint ensuite chaque point de division au sommet opposé, les trois arcs ainsi obtenus concourent au même point.*

Le calcul se fait identiquement comme sur un plan. Il suffit d'écrire les équations des trois arcs ramenées à la forme

$$Ax + By + C = 0.$$

En ajoutant leurs premiers membres, on trouve identiquement zéro, ce qui prouve que les trois circonférences ont un point commun.

On trouve, pour les coordonnées du point de rencontre,

$$X = \frac{mx' + nx'' + px'''}{m + n + p}, \quad Y = \frac{my' + ny'' + py'''}{m + n + p}.$$

Les mêmes formules s'appliquent sur un plan; si, par exemple, on mène dans un triangle les trois bissectrices, on voit que les trois nombres m, n, p seront alors les trois côtés a, b, c; on aura donc pour les coordonnées du centre du cercle inscrit à un triangle rectiligne

$$X = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \quad Y = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}.$$

S'il s'agissait du centre d'un des trois cercles exinscrits, il suffirait de changer le signe du côté qu'on n'aurait pas prolongé.

Si dans la formule relative à la division d'un arc suivant le rapport sphérique de m à n, on suppose $m = n$, on trouve

$$X = \frac{x' + x''}{2}, \quad Y = \frac{y' + y''}{2},$$

et dans le problème suivant si nous faisons

$$m = n = p,$$

on trouve

$$X = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad Y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$$

Nous appellerons par analogie le point ainsi obtenu *centre sphérique des moyennes distances* pour deux ou trois points. En général, nous appellerons centre sphérique des moyennes distances d'un système de n points, le point déterminé par les deux équations

$$X = \frac{\Sigma(x')}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma(y')}{n}.$$

THÉORÈME. *Étant donné un système de points sur la sphère, si l'on joint le centre sphérique des deux premiers au troisième, qu'on divise l'arc obtenu dans le rapport sphérique de* 1 *à* 2, *qu'on joigne le point trouvé au quatrième des points, puis qu'on divise l'arc de jonction dans le rapport sphérique de* 1 *à* 3, *et ainsi de suite, on trouvera aisément pour fixer la position du dernier point les équations*

$$X = \frac{\Sigma(x')}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma(y')}{n}.$$

Ce point est donc le centre sphérique du système de points; ce centre reste donc le même dans quelque ordre qu'on prenne les points.

Si l'on détermine d'abord le centre sphérique des moyennes distances de m points, puis le centre des $n - m$ qui restent, qu'on joigne ces deux points par un arc de grand cercle, enfin qu'on partage cet arc suivant le rapport sphérique de m à $(n - m)$, le point de division sera encore le centre sphérique des moyennes distances des n points donnés.

THÉORÈME. *Étant donné un système de* n + 1 *points, si l'on joint l'un quelconque d'eux au centre sphérique des moyennes distances de tous les autres, on obtiendra ainsi* n + 1 *arcs de grands cercles qui passeront par un point commun.*

Cela résulte comme conséquence du théorème précédent. On peut aussi le démontrer directement par un calcul très-simple. Soit X_1 la tangente de l'abscisse du centre de tout le système et X_0 pour celui de n points, on aura

$$X_0 = \frac{\Sigma(x') - x'}{n} = \frac{X'(n+1) - x_1}{n},$$

de même

$$Y_0 = \frac{Y'(n+1) - y'}{n}.$$

L'équation du cercle passant par le centre de n points et par le $(n+1)^{ième}$ sera donc

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{Y_1 - y_1}{X_1 - x'},$$

cercle qui passe évidemment par le point dont les coordonnées sont Y' et X'. C. Q. F. D.

La suite prochainement.