

GENOCCHI

**Solution de la deuxième question de M.
Strebtor (voir t. IX, p. 182)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 118-120

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__118_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA DEUXIÈME QUESTION DE M. STREBOR

(voir t. IX, p. 182),

PAR M. GENOCCHI.

THÉORÈME. *Si la fonction*

$$y = \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

étant développée suivant les puissances de x , donne la série

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots,$$

le développement de x , suivant les puissances de y , sera

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 y^5 - a_7 y^7 \dots$$

Car, on a

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)};$$

il s'ensuit que la fonction

$$y = \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

changera de signe avec x , et que par conséquent son développement ne doit renfermer que des puissances impaires de cette variable. En faisant

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = t,$$

et substituant les expressions imaginaires connues, on trouve

$$e^y = \operatorname{tang} t = \frac{1 - e^{2t\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1} e^{2t\sqrt{-1}} + 1};$$

mais

$$e^{t\sqrt{-1}} = e^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} e^{2t\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} e^{2t\sqrt{-1}},$$

donc

$$\sqrt{-1} e^y = \frac{\sqrt{-1} e^{2t\sqrt{-1}} - 1}{\sqrt{-1} e^{2t\sqrt{-1}} + 1},$$

donc

$$\sqrt{-1} e^{2t\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1} e^y - 1}{\sqrt{-1} e^y + 1}.$$

On voit, par la comparaison de ces deux équations, que si l'on change x en $y\sqrt{-1}$, on doit aussi changer y en $x\sqrt{-1}$: en supposant donc

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots,$$

et remplaçant x par $y\sqrt{-1}$, y par $x\sqrt{-1}$, on en conclura

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 y^5 - \dots$$

Les coefficients a_1, a_3, a_5, \dots , rentrent dans ceux que présente le développement de la sécante, et qui ont été étudiés par Euler dans son *Calcul différentiel*, 2^e partie, §§ 224-226. Ils ont beaucoup d'analogie avec les nombres de Bernoulli. On les exprime de la manière suivante par des séries et par des intégrales définies :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \left[1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \dots \right] \\
 &= \frac{2^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots n} \int_0^\infty \frac{z^{n-1} dz}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}.
 \end{aligned}$$
