GENOCCHI

Solution de la deuxième question de M. Strebor (voir t. IX, p. 182)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 118-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__118_1>

SOLUTION DE LA DEUXIÈME QUESTION DE M. STREBOR

(voir t. IX, p. 182),

PAR M. GENOCCHI.

THÉORÈME. *Si la fonction*

$$y = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

étant développée suivant les puissances de x, *donne la série*

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \ldots,$$

le développement de x, *suivant les puissances de* y, *sera*

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 y^5 - a_7 y^7 \ldots.$$

Car, on a

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)};$$

il s'ensuit que la fonction

$$y = \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

changera de signe avec x, et que par conséquent son développement ne doit renfermer que des puissances impaires de cette variable. En faisant

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = t,$$

et substituant les expressions imaginaires connues, on trouve

$$e^y = \operatorname{tang} t = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{2t\sqrt{-1}} - 1}{e^{2t\sqrt{-1}} + 1};$$

mais

$$e^{2t\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} e^{x\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}},$$

donc

$$\sqrt{-1}\, e^y = \frac{\sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}} - 1}{\sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}} + 1},$$

donc

$$\sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}\, e^y - 1}{\sqrt{-1}\, e^y + 1}.$$

On voit, par la comparaison de ces deux équations, que si l'on change x en $y\sqrt{-1}$, on doit aussi changer y en $x\sqrt{-1}$: en supposant donc

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 y^5 + \ldots,$$

et remplaçant x par $y\sqrt{-1}$, y par $x\sqrt{-1}$, on en conclura

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 x^5 - \ldots$$

Les coefficients a_1, a_3, a_5, . . . , rentrent dans ceux que présente le développement de la sécante, et qui ont été étudiés par Euler dans son *Calcul différentiel*, 2ᵉ partie, §§ 224-226. Ils ont beaucoup d'analogie avec les nombres de Bernoulli. On les exprime de la manière suivante par des séries et par des intégrales définies :

$$a_n = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left[1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \cdot \;\; \cdot\right]$$

$$= \frac{2^{n+1}}{1 \,.\, 2 \ldots n} \int_0^\infty \frac{z^{n-1}\,dz}{e^{\pi} \quad + e^{-\pi z}}.$$