Nouvelles annales de mathématiques

Dewulf

Démonstration de deux théorèmes de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 174-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__174_1>

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES DE M. STEINER

(voir t. ~~XVII~~, p. ~~431~~); t. XIV p. 232

PAR M. DEWULF.

THÉORÈME I. *P, P_1 étant deux points* quelconques *situés dans le plan d'une courbe de degré n, les pieds des normales abaissées de ces deux points sur la courbe sont distribués respectivement sur deux courbes chacune de degré n ayant en commun $n^2 - n + 1$ points fixes, savoir les $(n-1)^2$ points, pôles de la droite située à l'infini, pôles pris par rapport à la courbe donnée et n points situés à l'infini.*

Rappelons d'abord comment on détermine les pôles d'une droite par rapport à une courbe de degré n.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de cette courbe; cette équation peut être mise sous la forme

$$\varphi_n + \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0,$$

φ_r représentant l'agrégat des termes de degré r.

Si l'on mène une tangente à cette courbe par le point (α, β), on aura pour déterminer les points de contact, les deux équations

$$F(x, y) = 0, \quad (\beta - y)\frac{dF}{dy} + (\alpha - x)\frac{dF}{dx} = 0.$$

La dernière de ces équations s'abaisse au degré $n-1$ et se met sous la forme

$$(1) \qquad \beta\frac{dF}{dy} + \alpha\frac{dF}{dx} + k = 0,$$

en posant

$$k = \varphi_{m-1} + 2\varphi_{m-2} + \ldots + (n-1)\varphi_1 + n\varphi_0.$$

Cette courbe se nomme la *première polaire* du point (α, β) par rapport à la courbe.

Si le point (α, β) parcourt la droite

$$(2) \qquad y = Ax + B,$$

on aura

$$\beta = A\alpha + B;$$

ce qui permet de mettre l'équation (1) sous la forme

$$\left(A\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dx}\right)\alpha + B\frac{dF}{dy} + k = 0,$$

qui est l'équation générale de toutes les premières polaires des différents points de la droite donnée.

Cette équation est satisfaite quelle que soit la valeur de α si l'on pose

$$(3) \qquad A\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dx} = 0,$$

$$(4) \qquad B\frac{dF}{dy} + k = 0.$$

Ces deux courbes sont de degré $(n-1)$ et se coupent en $(n-1)^2$ points.

Donc les premières polaires de tous les points d'une droite par rapport à une courbe de degré n passent par $(n-1)^2$ points fixes, que l'on nomme *pôles* de la droite par rapport à la courbe.

Si la droite (2) passe à l'infini, les équations (3) et (4) deviennent

$$A\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}=0,$$

ou bien

$$\frac{dF}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}=0.$$

Remarque. Les pôles de la droite située à l'infini sont sur la courbe de degré $(n-1)$

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}=0,$$

qui renferme aussi les points multiples de la courbe donnée. (*Théorème* de Plücker.)

Passons à la démonstration du théorème de Steiner.

On a pour déterminer les points où les normales à une courbe menée par un point donné la coupent normalement, les deux équations

$$F(x,\ y)=0,$$

$$(5)\qquad (\beta-y)\frac{dF}{dx}-(\alpha-x)\frac{dF}{dy}=0.$$

Ces deux équations sont du degré n.

On conclut de là que par un point on peut généralement mener n^2 normales à une courbe du degré n. Ce faisceau de n^2 normales coupe la courbe en n^3 points. Les n^2 points où le faisceau coupe la courbe à angle droit sont sur une courbe de degré n. On sait d'ailleurs (SALMON, *Nouvelles Annales*, t. IX, p. 274) que les $n^3 - n^2$ points où le faisceau normal coupe la courbe obliquement sont sur une courbe de degré $n(n-1)$.

L'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$\beta \frac{dF}{dx} - \alpha \frac{dF}{dy} - \left(y \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Si le point (α, β) parcourt la droite

$$y = Ax + B,$$

la relation

$$\beta = A\alpha + B$$

permettra de mettre l'équation (5) sous la forme

$$\left(A \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)\alpha - \left(y \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy} - B \frac{dF}{dx}\right) = 0,$$

qui est l'équation générale de toutes les courbes, lieux des pieds des normales abaissées des différents points de la droite (2) à la courbe.

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de α, si l'on pose

$$(6) \qquad A \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} = 0$$

$$(7) \qquad (y - B) \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy} = 0$$

Ces courbes sont l'une du degré n, l'autre du degré $(n-1)$ et se coupent par conséquent en $n(n-1)$ points fixes.

L'équation (7), en y remplaçant $\frac{dF}{dy}$ par sa valeur tirée de l'équation (6), devient

$$(8) \qquad (y - B) \frac{dF}{dx} = Ax \frac{dF}{dx}.$$

Cette équation est satisfaite si l'on pose

$$y - B = A x,$$

ce qui prouve que n des $n(n-1)$ points d'intersection des équations (6) et (7) sont sur la droite donnée.

L'équation (8) est aussi satisfaite si l'on pose

$$\frac{dF}{dx} = 0;$$

mais alors d'après l'équation (6) on a aussi

$$\frac{dF}{dy} = 0.$$

Donc, parmi les $n(n-1)$ points d'intersection des équations (6) et (7), $(n-1)^2$ se trouvent à l'intersection de $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$, et ne sont, par conséquent, autres que les $(n-1)^2$ pôles de la droite située à l'infini par rapport à la courbe donnée.

Nota. Je crois que l'énoncé donné dans les *Nouvelles Annales* est inexact (t. XIV, p. 232). Il ne peut y avoir n points à l'infini.

En effet à chaque point à l'infini correspondent des asymptotes parallèles pour les courbes des équations (6) et (7).

L'équation (6) ne peut donner que $(n-1)$ asymptotes étant de degré $(n-1)$. D'ailleurs les équations qui donnent les coefficients angulaires de ces asymptotes sont

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} A\frac{d\varphi_n(1,c)}{dx} - \frac{d\varphi_n(1,c)}{dy} &= 0, \\ c\frac{d\varphi_n(1,c)}{dx} - \frac{d\varphi_n(1,c)}{dy} &= 0. \end{aligned}$$

Il est évident que toute valeur de c différente de A ne peut satisfaire en même temps à ces deux équations. Les points à l'infini sont donc tous sur la droite $y = Ax + B$, mais pour qu'il y ait $(n - 1)$ points à l'infini, l'équation (α) devrait avoir $n - 1$ racines égales à A, ce qui n'a pas lieu en général.

Il faut donc énoncer le théorème ainsi :

Étant donnée une droite quelconque dans le plan d'une courbe de degré n, les pieds des normales abaissées des différents points de cette droite sont distribués respectivement sur des courbes chacune de degré n ayant en commun $n^2 - n$ points fixes, $(n - 1)^2$ de ces points sont les pôles de la droite située à l'infini et n de ces points sont sur la droite donnée.

En appelant *podaire* d'un point par rapport à une courbe de degré n la courbe de degré n qui renferme les n^2 points où le faisceau normal coupe la courbe à angle droit, on pourrait dire : un point a par rapport à une courbe une infinité de podaires toutes de degré n, et chacune d'elles est podaire au point fixe par rapport à toutes celles qui la précèdent dans la série.

THÉORÈME II. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe de la classe n est une courbe de degré n^2* (*).

Soient

$$F(p, q) = 0, \quad py + qx = 1,$$

les équations d'une courbe de la classe n. On sait que $F(p, q)$ doit être de degré n.

La droite $py + px = 1$ dans chacune de ses positions est tangente à la courbe. Les coordonnées ordinaires du sommet de l'angle droit circonscrit à la courbe seront donc données par les deux équations

$$p_1 Y + q_1 X = 1, \tag{1}$$

$$p_2 Y + q_2 X = 1, \tag{2}$$

(*) Dans les coniques, ce lieu est un *cercle double*. TM.

entre les coefficients desquelles on a la relation

$$(3) \qquad p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0.$$

On a de plus les deux relations

$$(4) \qquad F(p_1, q_1) = 0,$$

$$(5) \qquad F(p_2, q_2) = 0.$$

Éliminant p_1, p_2, q_1, q_2 entre les équations (1), (2), (3), (4), (5), nous aurons une équation en XY qui sera l'équation du lieu cherché.

Les équations (4) et (5) sont du degré n, les trois autres sont du premier degré. D'après le théorème de Bezout l'équation finale sera du degré n^2. Ce qui démontre le théorème.

J'ajoute ici une observation sur le premier théorème qui donne un nouveau théorème général. Reprenons l'équation de la podaire d'un point $\alpha\beta$

$$\beta \frac{dF}{dx} - \alpha \frac{dF}{dy} - \left(y \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy} \right) = 0.$$

Si nous posons

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

cette équation est satisfaite quelles que soient les valeurs de α et β; ce qui donne ce théorème :

Les podaires de tous les points du plan d'une courbe de degré n ont en commun $(n-1)^2$ points fixes, qui ne sont autres que les pôles de la droite située à l'infini par rapport à cette même courbe. Ces $(n-1)^2$ points fixes sont situés sur la courbe

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} = 0$$

de degré $(n-1)$ qui renferme les points multiples de la courbe donnée.