Série de Tchebichef

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 193-195

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__193_1>

SÉRIE DE TCHEBICHEF.

Bul. de l'Acad. de S.-Pétersbourg, t. XVII, n° 17, p. 29. Octobre 1858.

Soit

$$u = f(x),$$

fonctions affectées d'erreurs quelconques; M. Tchebichef trouve le développement par la méthode des *moindres carrés* (*).

(*) C'est la *véritable* méthode d'interpolation; elle tient compte des erreurs possibles dans les mesures. Tm.

Faisons successivement

$$u_1 = f(h), \quad u_2 = f(2h), \ldots, \quad u_n = f(nh),$$

ces valeurs étant affectées d'erreurs égales.

u se développe suivant les dénominateurs de la fraction continue résultant du développement de l'expression

$$\frac{1}{x-h} + \frac{1}{x-2h} + \ldots + \frac{1}{x-nh}.$$

Ces dénominateurs s'expriment à un facteur constant près, et en prenant $\Delta x = h$ par

$$\Delta^l (x-h)(x-2h)\ldots(x-lh)(x-nh-2h)\ldots(x-nh-lh),$$

on a cette série

$$u = \frac{1}{n}\Sigma . u_i + \frac{3\Sigma i(n-i)\Delta u_i}{1^2.n.(n^2-1^2)h^2}\Delta(x-h)(x-nh-h)$$

$$+ 5\frac{\Sigma i(i+1)(n-i)(n-i-1)\Delta^2 u_i}{1^2.2^2.n.(n^2-1^2)(n^2-2^2)h^4}$$

$$\Delta^2 (x-h)(x-2h)(x-nh-h)(x-nh-2h)$$

$$+ 7\frac{\Sigma i(i+1)(i+2)(n-1)(n-i-1)(n-i-2)\Delta^3 u_i}{1^2\,2^2.3^2.n.(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)h^6}$$

$$\Delta^3(x-h)(x-2h)(x-3h)(x-nh-h)(x-nh+2h)(x-nh-3h)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les signes Σ s'étendent de $i = 1$ à $i = n$.

Désignant les fonctions

$$\Delta(x-h)(x-nh-h), \quad \Delta^2(x-h),\ldots, \quad \Delta^3$$

par Δ^1, Δ^2, Δ^3, etc., on a

$$\Delta^l = (2l-1)h(2x-nh-h)\Delta^{l-1}$$

$$-(l-1)^2[n^2-(l-1)^2]h^4\Delta^{l-2};$$

d'où l'on tire

$$\Delta^1 = h\,(2x - nh - h),$$

$$\Delta^2 = 3h^2\,(2x - nh - h)^2 - (n^2 - 1)\,h^4,$$

$$\Delta^3 = 15h^3\,(2x - nh - h)^3 - 3\,(3n^2 - 7)\,h^5\,(2x - nh - k)$$

$$\Delta^4 = 105\,h^4\,(2x - nh - h)^4 - 30\,(3n^2 - 13)\,h^6(2x - nh - h)^2$$
$$+\,9\,(n^2 - 1)\,(n^2 - 9)\,h^8,$$

$$\Delta^5 = 945\,h^5\,(2x - nh - h)^5 - 1050\,(n^2 - 7)\,h^7\,(2x - nh - h)^3$$
$$+\,15\,(15n^4 - 230\,n^2 + 407)\,h^9\,(2x - nh - h).$$

Le développement en fraction continue de l'expression

$$\frac{1}{x+h} + \frac{1}{x-2h} + \frac{1}{x-3h} + \ldots + \frac{1}{x+nh}$$

devient

$$\cfrac{2n}{2x - n - h - \cfrac{1^2\,(n^2 - 1^2)\,h^2}{3\,(2x - nh - h) - \cfrac{2^2\,(n^2 - 2^2)\,h^2}{5\,(2x - nh - h) - \cfrac{3^2\,(n^2 - 3^2)\,h^2}{7\,(2x - nh - h)}}}}.$$