Nouvelles annales de mathématiques

Vitasse

Note sur la limite supérieure des racines négatives déduites de la formule aux différences de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 213-215

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__213_2>

NOTE

Sur la limite supérieure des racines négatives déduites de la formule aux différences de Newton ;

PAR M. VITASSE,
Professeur au lycée de Tours.

La formule de Newton permet de former un polynôme algébrique de degré m, quand on connaît pour une valeur particulière attribuée à la variable la valeur de sa fonction et de ses m différences. La voici :

$$f(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots$$

$$+ \frac{\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)}{1.2.3\ldots m}\Delta^m y_0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que m soit un nombre pair, et que le coefficient de la plus haute puissance de x soit positif. Dans ce cas, la différence de l'ordre m est positive, et si l'on se reporte à la manière dont on forme le tableau des différences, on verra que pour une valeur négative de x suffisamment grande, la différence de l'ordre $m - 1$ sera négative, celle de l'ordre $m - 2$ positive, celle de l'ordre $m - 3$ négative, etc., la différence première négative, et la valeur de la fonction positive (*).

Or si $+ x_0$ est la plus petite valeur absolue de la variable pour laquelle toutes ces conditions sont satisfaites, *cette valeur sera une limite supérieure des racines négatives.*

En effet, si dans la formule qui précède la valeur absolue de x est plus grande que x_0, $x - x_0$ sera négatif et aussi $\frac{x - x_0}{h}$; et comme Δy_0 est par hypothèse négatif, le produit $\left(\frac{x - x_0}{h}\right) \Delta y_0$ sera positif. Dans le troisième terme, les facteurs $\frac{x - x_0}{h}$, $\frac{x - x_0}{h} - 1$ seront négatifs, et comme $\Delta^2 y_0$ est positif, ce terme sera encore positif. Généralement, les termes contenant en facteur une différence d'ordre pair et positive, contenant aussi un nombre pair de facteurs tous négatifs, seront positifs; pour une raison analogue, les termes contenant en facteur une différence d'ordre impair seront aussi positifs. Donc $f(x)$ gardera une valeur positive pour toutes les valeurs négatives de x, qui sont en valeur absolue plus grandes que x_0; x_0 est donc une limite supérieure des racines négatives.

Si m était un nombre impair, on prouverait de la même manière que si pour x_0 la fonction et ses différences

(*) Car ces différences sont exprimées par des fonctions alternativement de degré pair et impair. TM.

de divers ordres sont alternativement négatives et positives, x_0 sera une limite supérieure des racines négatives.

Ainsi dans tous les cas, la plus petite valeur absolue de x, pour laquelle la fonction et ses différences auront des valeurs dont les signes sont alternés, sera une limite supérieure des racines négatives.

Si l'on applique cette remarque à l'équation

$$r^3 - 7x + 7 = 0,$$

on trouve que $x = -4$ est la limite dont il s'agit. La racine négative est en effet comprise entre -3 et -4. (*Algèbre* de Bertrand, p. 377.)