L. BRAULT

Solution de la question 463

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 217-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__217_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 463

(voir p. 116);

PAR M. L. BRAULT,
Élève de l'institution Barbet.

Soit l'équation

$$(1)\qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

si

$$(n-1)a_1^2 - (n+2)a_2 < 0;$$

l'équation a au moins un couple de racines imaginaires.

TOEPLITZ.

On sait que si

$$f(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles, les équations

$$f'(x)=0,\quad f''(x)=0,\ldots,$$

ont aussi leurs racines réelles. La dérivée de l'ordre $(n-2)$ du premier membre de l'équation (1), égalée à zéro, donne, en ôtant un facteur commun,

$$(2)\qquad n(n-1)x^2+2(n-1)a_1x+2a_2=0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation est

$$(n-1)a_1^2-2na_2>0.$$

Or si l'on a

$$(n-1)a_1^2-(n+2)a_2<0,$$

on aura, à fortiori,

$$(n-1)a_1^2-2na_2<0,$$

et, dans ce cas, l'équation (2) ayant ses racines imaginaires, l'équation (1) aura au moins un couple de racines imaginaires.

*Note du **Rédacteur**.* $(n-1)a_1^2-2na_2$ est la somme des carrés de la différence des racines. Toute fonction symétrique dont chaque terme ne renferme que des exposants pairs, positifs ou négatifs, fournit un critérium lorsque cette fonction a une valeur négative.

M. Chabirand, élève de l'école préparatoire de Sainte-Barbe, donne la même solution que M. Brault.