NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BOUTERG

Solution de la question 461

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 242-247

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__242_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 461

(voir t. XVIII, p 46);

PAR M. BOUTERG (DE CLERMONT).

Démontrer que la série

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{2.3\ldots(n+1)}+\frac{1}{3.4\ldots(n+2)}\cdots$$

est convergente et a pour limite

$$\frac{1}{(n-1).1.2.3\ldots n-1}.$$

Ce qui donne la formule

$$\frac{1}{A_n^n}+\frac{1}{A_n^{n+1}}+\frac{1}{A_n^{n+2}}+\ldots=\frac{1}{(n-1)\,A_{n-1}^{n-1}},$$

en désignant par A_n^{n+1} le nombre des arrangements de $n+1$ lettres n à n.

Lemme. On a identiquement

$$\frac{a}{b-c}=\frac{a}{b}+\frac{ac}{b(b-c)},$$

donc on peut poser la série des identités suivantes :

$$\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1},$$

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n+1-2}=\frac{1}{n+1}+\frac{1.2}{(n+1)(n+1-2)},$$

$$\frac{1.2}{(n+1)(n+1-2)}=\frac{1.2}{(n+1)(n+2-3)}=\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}$$
$$+\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+2-3)},$$

....

$$\frac{1.2.3\ldots k-1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)(n+\overline{k-2}-\overline{k-1})}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots(k-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)\left[n+\overline{k-1}-k\right]}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots k-1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}$$
$$+\frac{1.2.3\ldots k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)[n-1]}.$$

Ajoutons membre à membre toutes ces égalités, il vient

$$\frac{1}{n-1}=1+\frac{1}{n+1}+\frac{1.2}{(n+1)(n+2)}+\ldots$$
$$+\frac{1.2.3\ldots k-1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}+\mathrm{R},$$

R étant donné par la relation

$$\mathrm{R}=\frac{1.2.3\ldots k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)(n-1)}.$$

Je vais prouver que R tend vers zéro lorsque k augmente indéfiniment. Prenons une valeur de k déjà grande et supérieure au nombre n, dont la valeur est finie et déterminée. Posons

$$k=n+l,$$

l pouvant croître indéfiniment. Nous aurons

$$\mathrm{R}=\frac{1.2\ldots n(n+1)(n+2)\ldots(n+l)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+l)[k+1][k+2]\ldots[k+n-1](n-1)};$$

on aperçoit alors une réduction qui, effectuée, conduit à

$$R = \frac{1.2\ldots n}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)(n-1)};$$

d'où l'on voit que si k augmente indéfiniment, R tend vers zéro; donc on a

$$\frac{n}{n-1} = \lim\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right].$$

Théorème. La démonstration du théorème qui constitue la question n'offre plus de difficulté, car en nommant S la série, on a

$$S = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right].$$

La parenthèse est une série convergente, qui a pour limite $\frac{1}{n-1}$; donc enfin la série donnée est convergente et a pour limite

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur.

M. Léon Brault, élève de l'Institution Barbet, remarque que

$$\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \ldots.$$

(Catalan, *Algèbre, Manuel des Candidats*, p. 62, et *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 257.)

En divisant les deux membres par $1.2.3\ldots n$, on obtient

$$\frac{1}{(n-1).1.2.3\ldots n-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{2.3.4\ldots n+1} + \ldots.$$

M. Rouquet, régent au collége de Castres, remarque que

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{1^n}; \quad \frac{1}{n+1!} < \frac{1}{2^n}; \quad \frac{1.2}{n+2!} < \frac{1}{3^n};$$

or lorsque $n > 1$, la série $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$ est convergente; donc la série donnée est convergente.

M. Aubert, professeur, remarque que dans l'énoncé de la question, le résultat précédent conduit à la formule

$$\frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_n^{n+1}} + \frac{1}{A_n^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{(n-1)\,A_{n-1}^{n-1}},$$

dans laquelle A_n^{n+1} représente le nombre des arrangements de $(n+1)$ lettres n à n.

Il peut servir également à démontrer la suivante :

$$(2) \qquad \frac{1}{C_n^n} + \frac{1}{C_n^{n+1}} + \frac{1}{C_n^{n+2}} + \ldots = n \cdot \frac{1}{(n-1)\,C_{n-1}^{n-1}}. \ (*)$$

C_n^{n+1} désigne le nombre des combinaisons de $(n+1)$ lettres n à n.

Il suffit, en effet, de multiplier chacun des termes de la série (1) par le facteur $1.2.3\ldots n$; elle devient alors

$$(3) \ \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n} + \frac{1.2.3\ldots n}{2.3.4\ldots(n+1)} + \frac{1.2.3\ldots n}{3.4.5\ldots(n+2)} + \ldots,$$

dont les termes sont respectivement égaux à ceux du premier membre de la formule (2).

Il est d'ailleurs évident, d'après ce qui précède, que la série (3) a pour limite

$$\frac{1.2.3\ldots n}{(n-1).1.2.3\ldots(n-1)} = n\,\frac{1}{(n-1)\,C_{n-1}^{n-1}},$$

(*) Ce que démontre également M. Puget, élève du lycée de Caen.

la limite de la série (1) permet encore d'obtenir très-simplement celle de la série

$$(4)\quad 1+\frac{1}{m+1}+\frac{1.2}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2.3}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\ldots,$$

donnée parmi les Exercices du *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique*, de M. Catalan (p. 62), et *Nouvelles Annales* (t. XV, p. 257).

Il est facile de voir que la série (4) peut être mise sous la forme

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m}+\dfrac{1.2.3\ldots m}{2.3\ldots m(m+1)} \\ \qquad +\dfrac{1.2.3\ldots m}{3.4\ldots(m+1)(m+2)}+\ldots; \end{cases}$$

elle est alors identique avec la série (3), et par suite a pour limite $\frac{1}{m-1}$; résultat indiqué par M. Catalan.

L'identité des séries (2) et (4) et de leurs limites peut s'apercevoir à priori.

En adoptant pour toutes deux la même notation, la série (2) s'écrira

$$\frac{1}{C_m^m}+\frac{1}{C_m^{m+1}}+\frac{1}{C_m^{m+2}}+\ldots,$$

et la série (4),

$$\frac{1}{C_0^m}+\frac{1}{C_1^{m+1}}+\frac{1}{C_2^{m+2}}+\ldots.$$

Or, on sait que l'on a généralement

$$(6)\qquad \frac{1}{C_m^{m+p}}=\frac{1}{C_p^{m+p}};$$

d'où résulte l'identité des termes respectifs des deux séries.

Il faut convenir, toutefois, que $C_0^m = 1$. Convention conforme à ce qu'on déduit de la relation (6), en y faisant $p = 0$.

MM. Challiot, élève du Lycée de Versailles, Gérard, élève de l'école des Carmes, Émile Duclos, trouvent la limite aussi par décomposition, mais ne démontrent pas directement la convergence.