Solution de la question 423

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 277-280

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__277_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 423

(voir t. IX, p. 195, 234);

PAR UN ABONNÉ.

On a mesuré les trois côtés a, b, c d'un triangle rectiligne ABC; α, β, γ sont les erreurs absolues respectives qu'on peut commettre sur la mesure des trois côtés a, b, c. Évaluer l'influence de ces erreurs sur les angles A, B, C.

Soient a_1, b_1, c_1 les variations des angles A, B, C, lorsque dans le triangle ABC

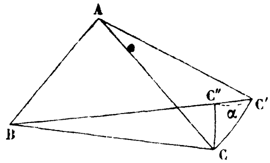
$$\begin{array}{llll} & a & \text{devient} & a+\alpha, \\ a_2,\ b_2,\ c_2, \text{ les variations lorsque} & b & \text{»} & b+\beta, \\ a_3,\ b_3,\ c_3, \qquad\qquad \text{»} & c & \text{»} & c+\gamma. \end{array}$$

Les variations des A, B, C lorsque a devient $a+\alpha$; b devient $b+\beta$ et c devient $c+\beta$, seront

$$a_1 + a_2 + a_3,\quad b_1 + b_2 + b_3,\quad c_1 + c_2 + c_3;$$

en négligeant une quantité très-petite par rapport à ces variations.

Calculons a_1, b_1, c_1.



Si a devient $a+\alpha$, les côtés b et c restant les mêmes, le triangle ABC deviendra ABC′,

$$a_1 = \mathrm{CAC'} = \frac{\mathrm{CC'}}{b}, \quad b_1 = -\,\mathrm{CBC'} = \frac{\mathrm{CC''}}{a};$$

mais le triangle CC′C″ donne

$$\mathrm{CC'} = \frac{\alpha}{\sin \mathrm{C}}, \quad \mathrm{CC''} = \frac{\alpha}{\mathrm{tang}\,\mathrm{C}};$$

donc

$$a_1 = \frac{\alpha}{b \sin \mathrm{C}}, \quad b_1 = \frac{-\alpha}{a\, \mathrm{tang}\,\mathrm{C}},$$

et, par analogie,

$$c_1 = \frac{-\alpha}{a\, \mathrm{tang}\,\mathrm{B}}.$$

Dans ces formules, α peut être positif ou négatif; on aura de même

$$a_2 = -\frac{\beta}{b\, \mathrm{tang}\,\mathrm{C}}, \quad b_2 = \frac{\beta}{c \sin \mathrm{A}}, \quad c_2 = -\frac{\beta}{b\, \mathrm{tang}\,\mathrm{A}};$$

$$a_3 = -\frac{\gamma}{c\, \mathrm{tang}\,\mathrm{B}}, \quad b_3 = -\frac{\gamma}{c\, \mathrm{tang}\,\mathrm{A}}, \quad c_3 = \frac{\gamma}{a \sin \mathrm{B}};$$

d'où (en désignant par A_1, B_1, C_1 les valeurs qu'il s'agit d'évaluer),

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_1 &= a_1 + a_2 + a_3 = \frac{\alpha}{b \sin \mathrm{C}} - \frac{\beta}{b\, \mathrm{tang}\,\mathrm{C}} - \frac{\gamma}{c\, \mathrm{tang}\,\mathrm{B}};\\ \mathrm{B}_1 &= b_1 + b_2 + b_3 = -\frac{\alpha}{a\, \mathrm{tang}\,\mathrm{C}} + \frac{\beta}{c \sin \mathrm{A}} - \frac{\gamma}{c\, \mathrm{tang}\,\mathrm{B}},\\ \mathrm{C}_1 &= c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{\alpha}{a\, \mathrm{tang}\,\mathrm{B}} - \frac{\beta}{b\, \mathrm{tang}\,\mathrm{A}} + \frac{\gamma}{a \sin \mathrm{B}}. \end{aligned} \right.$$

L'erreur A_1 sera la plus grande possible si a_1, a_2, a_3 sont de même signe, c'est-à-dire si β et γ sont de signe contraire à α, sa valeur absolue sera alors

$$A_1 = \frac{\alpha}{b \sin C} + \frac{\beta}{b \operatorname{tang} C} + \frac{\gamma}{c \operatorname{tang} B}.$$

Si l'on mesure les côtés à la chaîne, les plus grandes valeurs de α, β, γ seront

$$\frac{1}{1000} a, \quad \frac{1}{1000} b, \quad \frac{1}{1000} c,$$

donc

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum de } A_1 = \dfrac{1}{1000}\left(\dfrac{a}{b \sin C} + \dfrac{1}{\operatorname{tang} C} + \dfrac{1}{\operatorname{tang} B}\right), \\ \text{ou} \\ \text{Maximum de } A_1 = \dfrac{2}{1000}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tang} C} + \dfrac{1}{\operatorname{tang} B}\right). \end{array} \right.$$

Cette formule met en évidence l'inconvénient qu'il y a à prendre des angles trop petits dans les triangles topographiques, et montre que la forme équilatérale est la plus avantageuse.

Si l'on suppose que B et C soient égaux à 45 degrés, qui est la plus petite valeur admise, on aura

$$\text{Maximum de } A_1 = \frac{4}{1000}.$$

Dans cette formule, A_1 représente la longueur de l'arc dans un cercle de rayon 1; si l'on veut exprimer l'erreur en secondes, on aura

$$\frac{4}{1000} \cdot \sin 1'' = 13''.$$

Si l'on admet des angles de 30 degrés, on peut commettre une erreur de 22 secondes. Si l'on veut connaître la limite de l'erreur commise sur les angles d'un triangle particulier, après avoir calculé les angles on se servira de la formule (2), qui peut être mise sous la forme plus générale maximum de $A_1 = 2\varepsilon \left(\frac{1}{\text{tang}\,C} + \frac{1}{\text{tang}\,B}\right)$.

Nota. On arrive également aux formules (1), en prenant dans les formules telles que $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$, la différentielle totale de cos A.