Decharme

Banachiewicz

Solution de la question 470

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 280-282

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__280_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 170

(voir, p. 170);

PAR M. DECHARME,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot),

ET M. BANACHIEWICZ,
Élève de l'École Centrale.

Si sur la diagonale d'un rectangle comme corde on décrit un cercle, le lieu des extrémités d'un diamètre parallèle à l'autre diagonale est une hyperbole équilatère.

J'appelle a et b les deux côtés du rectangle; je prends a pour axe des x, b pour axe des y.

En appelant α et β les coordonnées du centre du cercle, l'équation de ce cercle passant par l'origine est

$$(1) \qquad 2\alpha x + 2\beta y = x^2 + y^2,$$

le point $x = a$, $y = b$ appartient au cercle; donc

$$(2) \qquad 2\alpha a + 2\beta b = a^2 + b^2.$$

L'équation de la parallèle menée par le centre du cercle est

$$(3) \qquad \alpha b + \beta a = ay + bx.$$

Éliminant α et β des équations (1), (2), (3), on a le lieu cherché.

Or

$$\alpha = \frac{y(a^2 + b^2) - b(x^2 + y^2)}{2(ay - bx)},$$

$$\beta = \frac{a(x^2 + y^2) - x(a^2 + b^2)}{2(ay - bx)},$$

substituant dans l'équation (3), et multipliant par $2(ay - bx)$, faisant les réductions et mettant $a^2 + b^2$ en facteur, on obtient

$$(a^2 + b^2)(y^2 - x^2 + ax - by) = 0;$$

donc l'équation du lieu est

$$y^2 - x^2 + ax - by = 0.$$

C'est une hyperbole équilatère ayant pour centre le centre du rectangle, et pour asymptotes les parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées menées par ce centre.

Cette hyperbole passe évidemment par les quatre sommets du rectangle, car pour $x = 0$ on a

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = b,$$

et pour $x = a$ on a aussi

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = b.$$

L'équation

$$y^2 - x^2 + ax + by = 0$$

est celle du lieu de l'intersection du cercle par le diamètre parallèle à la première diagonale.

MM. Eugène Dupont et Ernest Fontaine, élèves du lycée Louis-le-Grand, ont envoyé des solutions du même genre.

Note du Rédacteur. Pourvu que les trois équations soient linéaires en α et β, le lieu sera une conique, car le déterminant est du deuxième degré en x et y, et ce déterminant égalé à zéro donne l'équation du lieu, les axes étant quelconques.

Soient en général les trois équations

$$a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0,$$
$$a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0,$$
$$a_3 \alpha + b_3 \beta + c_3 = 0,$$

entre lesquelles il faut éliminer α et β.

On prend pour inconnues $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$; les équations deviennent

$$a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 \gamma = 0,$$
$$a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 \gamma = 0,$$
$$a_3 \alpha + b_3 \beta + c_3 \gamma = 0;$$

pour que ces équations subsistent simultanément, on doit avoir

$$(a_1 \, b_2 \, c_3) = 0;$$

les crochets désignent un déterminant.