NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ADPHONSE PUJET
ÉMILE FRANÇOISE

Solution de la question 476

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 359-362
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__359_0>

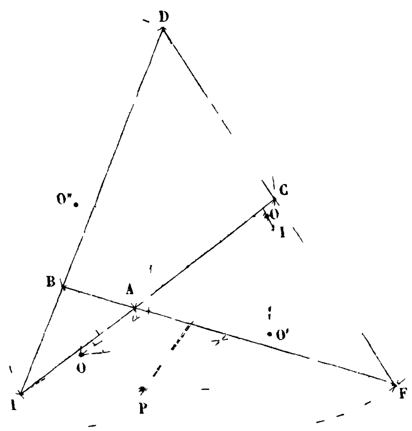
SOLUTION DE LA QUESTION 476

(voir p. 170)

PAR MM. ADPHONSE PUJET ET ÉMILE FRANÇOISE,
Élèves du lycée de Caen (classe de M. Toussaint).

Cercle de neuf points

Soit le quadrilatère plan ABCD. En prolongeant les



côtés d'après l'énoncé, on forme les quatre triangles

AEB, CED, AFC, BFD,

Θ, O''', O' et O'' sont les centres respectifs des circonférences circonscrites à ces quatre triangles.

On remarque :

1°. Que ces quatre circonférences se coupent en un même point P.

En effet, considérons ce point comme l'intersection des deux circonférences O et O'; il suffira de démontrer que les quadrilatères EPCD et BPFD sont inscriptibles, ou que les angles EPC et BPF sont égaux entre eux et à $180 - BOC$; or

Le quadrilatère inscrit FPAC donne

$$FPC = FAC.$$

De même le quadrilatère inscrit EPAB donne

$$EPB = EAB = FAC,$$

donc

$$FPC = EPB;$$

d'où nous tirons

$$FPC + BPC = EPB + BPC \quad \text{ou bien} \quad EPC = BPF.$$

Les mêmes quadrilatères inscrits donnent

$$APF = ECD \quad \text{et} \quad APB = CED;$$

donc

$$APF + APB = BPF = ECD + CED = 180 - EDC.$$

C. Q. F. D.

2°. Le quadrilatère $OO'O''O'''$ est inscriptible, car les angles $O''OO'''$ et $O''O'O'''$, égaux respectivement à EPB et FPC, sont égaux entre eux, puisque l'on a

$$EPB = FPC.$$

Ceci posé, il s'agit de démontrer que les trois droites EO, DO'' et CO' se coupent en un même point, et que ce point appartient à la circonférence $OO'O''O'''$. Or l'angle OEA est le complément de EPA; $O'DC$ celui de ABD: mais le quadrilatère inscrit EPAB donne

$$\widehat{EPA} = \widehat{ABD};$$

donc

$$\widehat{OEA} = O''DC.$$

Ce qui démontre que le point I où se coupent les droites EO et DO$''$ appartient à la circonférence O$'''$.

Joignons maintenant IC et CO$'$; ces deux droites se confondent en une seule, car on a

$$\widehat{ECI} = \widehat{EDI} = 90 - BFD,$$

$$ECO' = 90 - AFC;$$

donc

$$ECO' = ECI.$$

C. Q. F. D.

Reste à faire voir que le point I appartient à la circonférence OO$'$O$''$O$'''$, ou que l'on a

$$OIO'' = OO'O'';$$

or,

$$OIO'' = ECD \text{ (angles ayant même mesure)},$$

$$OO'O'' = APF \text{ (angles ayant leurs côtés perpendiculaires)}.$$

Le quadrilatère inscrit APFC donne

$$APF = ACD;$$

donc

$$OIO'' = OO'O''.$$

C. Q. F. D.

On démontrerait, de la même manière, que les trois autres points I sont déterminés par l'intersection des trois circonférences O, O$'$, O$''$ avec OO$'$O$''$O$'''$. Ce que démontre le théorème proposé.

Remarque. Il y a un autre point important qui appartient à la même circonférence OO$'$O$''$O$'''$; c'est le point P. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que le quadrilatère OPIO$''$ est inscriptible, ou bien que l'on a

$$\widehat{POI} = \widehat{PO''I}:$$

or,

$$\widehat{POI} = 2\,\widehat{PEI}, \quad \widehat{PO''I} = 2\,\widehat{PDI} \quad \text{et} \quad PEI = PDI;$$

donc

$$POI = PO''I.$$

C. Q. F. D.