Nouvelles annales de mathématiques

Le Besgue

Remarques sur quelques séries

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 433-437

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__433_0>

REMARQUES SUR QUELQUES SÉRIES;

PAR M. LE BESGUE.

1. Sans être nouvelles, les remarques suivantes peuvent être utiles; il suffira donc de les exposer brièvement.

Le terme général du développement de la puissance

$$(a+b+c+\ldots)^m$$

est en posant

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=m \quad \text{et} \quad 1.2.3\ldots\alpha=\Pi\alpha;$$

$$\frac{\Pi m}{\Pi\alpha.\Pi\beta.\Pi\gamma\ldots}\,a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots.$$

On sait que le coefficient $\frac{\Pi m}{\Pi\alpha.\Pi\beta.\Pi\gamma\ldots}$ exprime le nombre des permutations des facteurs d'un produit où il y a α facteurs égaux entre eux, puis β autres aussi égaux entre eux, et ainsi de suite, le nombre total des facteurs étant m.

2. Il suit de là que les développements $(1+1)^m$, $(1-1)^m$ où les termes également distants des extrêmes sont égaux en valeur absolue, conduisent aux relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{2^{2m+1}}{\Pi(2m+1)}&=\frac{2}{\Pi(2m+1)}+\frac{2}{\Pi 1.\Pi 2m}\\&+\frac{2}{\Pi 2.\Pi(2m-1)}+\ldots+\frac{2}{\Pi m.\Pi(m+1)},\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}0&=\frac{2}{\Pi(2m+1)}+\frac{2}{\Pi 1.\Pi 2m}\\&+\frac{2}{\Pi 2.\Pi(2m-2)}-\ldots\pm\frac{2}{\Pi m.\Pi m+1},\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2^{2m}}{\Pi 2m} = \frac{2}{\Pi 2m} + \frac{2}{\Pi 1 . \Pi(2m-1)} + \ldots \\ &+ \frac{2}{\Pi(m-1) . \Pi(m+1)} + \frac{1}{\Pi m . \Pi m}, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &0 = \frac{2}{\Pi(2m)} - \frac{2}{\Pi 1 . \Pi(2m-1)} \\ &+ \frac{2}{\Pi 2 . \Pi(2m-2)} + \ldots \pm \frac{1}{\Pi m . \Pi m}; \end{aligned}\right.$$

relations qui vont servir pour établir quelques formules importantes.

3. Si l'on pose

$$(5)\ x = 1 - \frac{u^2}{\Pi 2} + \frac{u^4}{\Pi 4} - \ldots, \quad y = \frac{u}{\Pi 1} - \frac{u^3}{\Pi 3} + \frac{u^5}{\Pi 5} - \ldots,$$

on en déduira

$$(6)\qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Les formules (1), (2), (3) et (4) montrent de suite que le coefficient de chaque puissance de u dans x^2+y^2 est égal à zéro.

Les formules (5) sont donc le sinus et le cosinus d'un certain arc de cercle. Or comme

$$dx = -y.du, \quad dy = x.du,$$

il en résulte

$$dx^2 + dy^2 = (x^2 + y^2)\, du^2,$$

ou bien

$$ds = du,$$

d'où $u = s$ en prenant convenablement l'origine des arcs et le sens dans lequel on doit les compter.

L'expression

$$du = \frac{dy}{x} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

donne encore

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

qu'il faudra prendre entre les limites $y = 0$ et y positif < 1.

4. Si l'on eût posé

$$(7) \quad x_1 = 1 + \frac{u^2}{\Pi 2} + \frac{u^4}{\Pi 4} + \ldots, \quad y_1 = u + \frac{u^3}{\Pi 3} + \frac{u^5}{\Pi 5} + \ldots,$$

on eût trouvé

$$(8) \qquad x_1^2 - y_1^2 = 1.$$

x_1 et y_1 sont ce qu'on nomme *sinus* et *cosinus hyperboliques*, mais ici u n'est pas un arc de la courbe.

On a

$$dx_1 = y_1\, du, \quad dy_1 = x_1\, du;$$

$$du = \frac{dx_1}{y_1}$$

et

$$u = \int \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}}.$$

5. Les sinus et cosinus hyperboliques s'expriment aisément par des exponentielles.

Si l'on considère l'expression

$$F(u) = 1 + \frac{u}{\Pi 1} + \frac{u^2}{\Pi 2} + \frac{u^3}{\Pi 3} + \ldots,$$

en formant le produit $F(u).F(v)$ et groupant les termes de même degré

$$\frac{u^i}{\Pi i} + \frac{v}{\Pi i}\frac{u^{i-1}}{\Pi(i-1)} + \ldots + \frac{v^i}{\Pi i} = \frac{(u+v)^i}{\Pi i},$$

on aura la relation

$$(9) \qquad \mathrm{F}(u)\ \mathrm{F}(v) = \mathrm{F}(u+v),$$

qui conduit de suite à

$$\mathrm{F}(u)^2 = \mathrm{F}(2u)\ldots, \quad \mathrm{F}(u)^m = \mathrm{F}(mu);$$

et, par suite,

$$\sqrt[m]{\mathrm{F}(u)} = \mathrm{F}\left(\frac{u}{m}\right),$$

et encore

$$[\mathrm{F}(u)]^{\frac{n}{m}} = \mathrm{F}\left(\frac{n}{m}u\right).$$

Il faut bien remarquer que la fonction a^{ku} satisfait à la relation (9). D'après cela, si l'on pose

$$a^k = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = e,$$

qui conduit à

$$k = \frac{\log e}{\log a},$$

quelle que soit la base du système de logarithme, on aura

$$a^{k\frac{n}{m}} = 1 + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2}{1.2} + \ldots,$$

le sorte qu'en posant

$$k\frac{n}{m} = u,$$

on trouvera

$$a^u = 1 + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e}u\right)}{1} + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e}u\right)^2}{1.2} + \ldots,$$

et pour $a = e$,

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} \cdots$$

Or soit

$$e^u = x_1 + y_1,$$
$$z = x_1 - y_1,$$

il vient

$$z.e^u = x_1^2 - y_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad z = e^{-u};$$

de là encore

$$x_1 = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad y_1 = \frac{e^u - e^{-u}}{2};$$

expressions des sinus et cosinus hyperboliques.

Comme

$$e^u = x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1},$$

il en résulte

$$u = l\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1}\right)$$

et

$$du = \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}}.$$

comme on l'a déjà vu.

6. L'expression du développement de a^x,

$$y = a^x = 1 + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e}x\right)}{1} + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e}x\right)^2}{1.2} + \ldots,$$

conduit à la dérivée de l'exponentielle; d'où l'on peut tirer, par le théorème des fonctions inverses, la dérivée de la fonction logarithmique. Cette marche, suivie par d'anciens auteurs, qui ont peut-être un peu négligé la rigueur, est plus directe que celle qui consiste à traiter d'abord la fonction logarithmique, puisque dans l'ordre naturel on passe des exponentielles aux logarithmes, et non des logarithmes aux exponentielles (*).

(*) *Voir* t. XIV, p. 151. Tm.