Covariants

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 446-451

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__446_1>

COVARIANTS

(voir p. 304).

On est prié de relire ce qui concerne les invariants (p. 253).

17. Soit
$$U = (a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y)^3.$$
Posons
$$x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \zeta, \quad y = \alpha_2 \xi + \beta_2 \zeta;$$
on obtient
$$U_1 = (A_0, A_1, A_2, A_3)(\xi, \zeta)^3;$$
$$A_0 = (a_0, A_1, A_2, A_3)(\alpha_1, \alpha_2)^3, \quad A_3 = (A_0, A_1, A_2, A_3)(\beta_1, \beta_2)^3;$$
$$3\,A_1 = \beta_1 \frac{dA_0}{d\alpha_1} + \beta_2 \frac{dA_0}{d\alpha_2},$$
$$3\,A_2 = \alpha_1 \frac{dA_3}{d\beta_1} + \alpha_2 \frac{dA_3}{d\beta_2}.$$

Posons

$$\varphi = \left[a_0 a_2 - a_1^2,\ \frac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2),\ (a_1 a_3 - a_2^2) \right] (x, y)^2,$$

$$\varphi_1 = \left[A_0 A_2 - A_1^2,\ \frac{1}{2}(A_0 A_3 - A_1 A_2),\ (A_1 A_3 - A_2^2) \right] (\xi, \zeta)^3;$$

les binômes doivent être considérés comme des monômes. Remplaçant dans φ, x et y par leurs valeurs en ξ et ζ, et dans φ_1 les A par leurs valeurs en a, on trouve

$$\varphi_1 = (\alpha_1, \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^3 \varphi;$$

φ est dit un *covariant* de U.

Dans les invariants, on n'a que les coefficients a de U, tandis que dans les covariants, on a aussi les variables x, y.

18. *Généralisation.* Soit U une fonction à deux variables; tranformons-la linéairement comme dans le paragraphe précédent; soient a, b, c, d, ... les coefficients de U, et A, B, C, D, ... les coefficients de la fonction transformée U_1; ces coefficients sont des fonctions de a, b, c, d, ... et de α_1, β_1, α_2, β_2.

Faisons sur U une opération *dérivative ;* par exemple,

$$\frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^2U}{dy^2} - \left(\frac{d^2U}{dx\,dy}\right)^2 = \varphi,$$

et d'une manière analogue,

$$\frac{d^2U_1}{d\zeta^2}\frac{d^2U_1}{d\xi^2} - \left(\frac{d^2U_1}{d\xi\,d\zeta}\right)^2 = \varphi_1;$$

φ est composé de a, b, c, d,... et de x, y;

φ_1 est composé de A, B, C, D,... et de ξ, ζ.

Si remplaçant dans φ, x et y par ses valeurs en ξ, ζ, et dans φ_1, A, B, C, D... par ses valeurs en a, b, c, d...; α_1, α_2, β_1, β_2, on obtient

$$\varphi_1 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^p \varphi,$$

où p est un entier positif alors φ est un covariant de U.

Il y a encore d'autres opérations dérivatives qui donnent des covariants. La démonstration exige qu'on sache ce que deviennent par transformation les quotients différentiels de U, c'est l'objet de l'article suivant.

Transformation linéaire des quotients différentiels (*).

19. Soit le *quantic* binaire U et le transformé U_1, au moyen de

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y;$$

d'où l'on déduit

$$(\alpha_1 \beta_2)\ X = \beta_2 x - \beta_1 y,$$
$$(\alpha_1 \beta_2)\ Y = -\alpha_2 x + \alpha_1 y;$$
$$(\alpha_1 \beta_2)\frac{dX}{dx} = \beta_2,\quad (\alpha_1 \beta_2)\frac{dX}{dy} = -\beta_1,$$
$$(\alpha_1 \beta_2)\frac{dY}{dx} = -\alpha_2,\quad (\alpha_1 \beta_2)\frac{dY}{dy} = \alpha_1,$$

donc

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU_1}{dX}\frac{dX}{dx} + \frac{dU_1}{dY}\frac{dY}{dx},$$
$$\frac{dU}{dy} = \frac{dU_1}{dX}\frac{dX}{dy} + \frac{dU_1}{dY}\frac{dY}{dy};$$
$$(\alpha_1 \beta_2)\frac{dU}{dy} = \alpha_1\frac{dU_1}{-dY} + \beta_1\left(\frac{-dU}{dX}\right),$$
$$-(\alpha_1 \beta_2)\frac{dU}{dx} = \alpha_2\frac{dU_1}{dY} + \beta_2\left(\frac{-dU_1}{dX}\right).$$

Ainsi, à l'exception du diviseur constant $\frac{1}{(\alpha_1 \beta_2)}$, $\frac{dU}{dy}$

(*) *Quotient différentiel*, usité chez les Allemands et adopte par M. Duhamel, est préferable à *coefficient différentiel*, qui est seulement relatif au théorème de Taylor.

et $-\frac{dU}{dx}$ sont transformés respectivement par le même procédé que x et y, on remplace x par $\frac{dU}{dy}$ et y par $-\frac{dU}{dx}$.

Si l'on a donc

$$U = f(x, y), \quad U_1 = f(X, Y),$$

on a aussi

$$(\alpha_1 \beta_2)^n f\left(\frac{dU}{dy}, -\frac{dU}{dx}\right) = f\left(\frac{dU_1}{dY}, \frac{dU_1}{dx}\right);$$

le second membre est donc un covariant de U (18); n indique le degré de f.

Il faut faire attention que $x^p y^q$ ne donne pas

$$(-1)^p \left(\frac{dU}{dx}\right)^p \left(\frac{dU}{dy}\right)^q,$$

mais

$$(-1)^p \frac{d^n U}{dx^p\, dy^q},$$

où n est le degré de U et $p + q = n$.

20. *Exemples.* 1°.

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad U_1 = AX^2 + 2BXY + 2CY^2;$$

d'où

$$(a) \quad (\alpha_1 \beta_2)^2 \left(a\frac{d^2}{dy^2} - 2b\frac{d^2}{dx\,dy} + c\frac{d^2}{dx^2}\right) = \frac{A\,d^2}{a\,Y^2} - \frac{2B\,d^2}{dY\,dX} + C\frac{d^2}{dX^2},$$

U et U_1 sont sous-entendus. Exécutant, on trouve

$$(\alpha_1 \beta)^2 (ac - b^2) = AC - B^2,$$

où $ac - b^2$ est un invariant, parce que les variables ont disparu. Mais si n est supérieure à 2, la formule opératoire donne un covariant.

Ainsi, faisant $n = 3$ et appliquant la formule opératoire

$$\left(a\frac{d^2}{dy^2} - 2b\frac{d^2}{dx\,dy} + c\frac{d^2}{dy^2}\right)\mathrm{U}$$

(U n'est pas un facteur, mais à écrire après les d^2), et posons

$$\mathrm{U} = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

on trouve pour covariant, après avoir divisé par 6,

$$2(ac - b^2)x + (ad - bc)y;$$

on a encore

$$2(bd - c^2)y + (ad - bc)x.$$

Cette formule opératoire est maintenant connue sous le nom de *Hessien*, d'après le célèbre disciple de Jacobi, Otto Hesse. Mais si l'on applique à cette fonction U la formule opératoire

$$a\frac{d^3}{dy^3} - 3b\frac{d^3}{dy^2\,dx} + 3c\frac{d^3}{dy\,dx^2} - d\frac{d^3}{dx^3},$$

les variables disparaissent, et l'invariant s'anéantit identiquement, de sorte qu'il n'y a pas d'invariant, et la même chose a lieu pour toute fonction de degré impair, lorsqu'on y applique une formule opératoire déduite de cette fonction elle-même. Nous laissons au lecteur le soin d'en chercher la démonstration. Cela n'a pas lieu pour les fonctions de degré pair, qui donnent toujours un invariant.

2°.

$$\mathrm{U} = (a, b, c, d, e)(x, y)^4,$$

on en déduit la formule opératoire

$$\left(a\frac{d^4}{dy^4} - 4b\frac{d^4}{dy^3\,dx} + 6c\frac{d^4}{dy^2\,dx^2} - 4d\frac{d^4}{dy\,dx^3} + e\frac{d^4}{dx^4}\right);$$

appliquant cette formule à U, on trouve l'invariant

$$ae - 4bd + 3c^2;$$

donc

$$\frac{d^4}{dx^4}\frac{d^4}{dy^4} - 4\frac{d^4}{dx^3\,dy}\frac{d^4}{dx\,dy^3} + 3\left(\frac{d^4}{dx^2\,dy^2}\right),$$

appliqué à U, donne l'invariant

$$ae - 4bd + 3c^2;$$

et en appliquant cette même formule opératoire à un degré supérieur, on trouve un covariant.