PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 49-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__49_1>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 33);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

§ II. — *Conditions pour qu'un point soit intérieur à une surface du second ordre.*

37. Je dirai qu'un point est *intérieur à une surface du second ordre* lorsque de ce point on ne peut mener aucune tangente à la surface (*).

(*) Ainsi dans l'hyperboloïde à une nappe, il n'existe pas de points intérieurs. TM.

Soient $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ les coordonnées d'un point fixe, et

$$(1)\qquad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

les équations d'une droite quelconque; on exprimera que cette droite passe par le point donné, en écrivant les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 + m_4 \alpha_4 = 0, \\ n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + n_3 \alpha_3 + n_4 \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que si une droite était tangente, le déterminant V est nul, et réciproquement (n° 35).

Nous exprimerons donc que le point $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ est *intérieur*, en écrivant les conditions pour qu'il n'y ait aucune valeur des m_i, n_i qui puisse annuler le déterminant

$$(3)\qquad V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

où

$$a_{r,s} = a_{s,r},$$

et en ayant égard toutefois aux relations (2).

Désignons par φ le premier membre de l'équation de la surface, par X_1, X_2, X_3, X_4 ses demi-dérivées par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, x_4; puis, par φ_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ces mêmes expressions dans lesquelles on aura remplacé x_1, x_2, x_3, x_4 respectivement par α_1, α_2, α_3, α_4;

on aura les identités

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 \\
&= a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3 + a_{41}\alpha_4 ; \\
A_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 \\
&= a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3 + a_{42}\alpha_4 ; \\
A_3 &= a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 \\
&= a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{43}\alpha_4 ; \\
A_4 &= a_{41}\alpha_2 + a_{42}\alpha_2 + a_{43}\alpha_3 + a_{44}\alpha_4 \\
&= a_{14}\alpha_1 + a_{24}\alpha_2 + a_{34}\alpha_3 + a_{44}\alpha_4 ; \\
\varphi_0 &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 .
\end{aligned}
\right.
$$

38. Maintenant multiplions la quatrième ligne du déterminant V par α_4, et ajoutons-y les trois premières multipliées respectivement par α_1, α_2, α_3, il viendra, en ayant égard aux relations (2) et (4),

$$
(5)\qquad \alpha_4 V = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

Puis multiplions la quatrième colonne de ce dernier déterminant par α_4 et ajoutons-y les trois premières respectivement multipliées par α_1, α_2, α_3, on obtiendra définitivement

$$
(6)\qquad \alpha_4^2 V = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_1 & m_1 & n_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & A_2 & m_2 & n_2 \\
a_{34} & a_{32} & a_{33} & A_3 & m_3 & n_3 \\
A_1 & A_2 & A_3 & \varphi_0 & 0 & 0 \\
m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\
n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

En développant le second membre de l'identité (6), après avoir posé

$$(7)\qquad \begin{cases} y_1 = n_2 m_3 - n_3 m_2, \\ y_2 = n_3 m_1 - n_1 m_3, \\ y_3 = n_1 m_2 - n_2 m_1, \end{cases}$$

$$(8)\qquad R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & A_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & \varphi_0 \end{vmatrix}$$

on trouvera

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha_4^2 V = \dfrac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} y_1^2 + \dfrac{d^2 R}{da_{33}\, da_{11}} y_2^2 + \dfrac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} y_3^2 \\ \qquad - 2 \dfrac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}} y_2 y_3 - 2 \dfrac{d^2 R}{da_{22}\, da_{31}} y_3 y_1 \\ \qquad - 2 \dfrac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}} y_1 y_2 . \end{cases}$$

On voit, d'après les équations (7), que si l'on peut déterminer pour y_1, y_2, y_3 des valeurs qui ne soient pas nulles toutes trois et qui annulent le second membre de l'équation (9), il en résultera toujours pour les m_i, n_i une infinité de valeurs qui rendront la droite (1) tangente à la surface.

39. Avant de discuter l'équation (9), je vais indiquer plusieurs relations d'identité, dont la vérification est facile, et qui peuvent s'obtenir immédiatement en appliquant aux dérivées partielles du déterminant R la formule générale déjà citée

$$(10)\qquad P \frac{d^2 P}{da_{rs}\, da_{r_1 s_1}} = \frac{dP}{da_{rs}} \frac{dP}{da_{r_1 s_1}} - \frac{dP}{da_{r s_1}} \frac{dP}{da_{r_1 s}},$$

et en ayant égard à l'identité

$$\frac{d^2 P}{da_{rs}\, da_{r_1 s_1}} = - \frac{d^2 P}{da_{rs_1}\, da_{r_1 s}} \tag{11}$$

(Brioschi, *Théorie des Déterminants*, p. 10).

Ces relations sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} &= \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{22}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}\right)^2, \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} &= \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}}\right)^2, \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} &= \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}}\right)^2; \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{23}} &= \frac{d^2 R}{da_{23}\, da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{22}} + \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}, \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{13}} &= \frac{d^2 R}{da_{13}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{11}} + \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}, \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{12}} &= \frac{d^2 R}{da_{12}\, da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{11}} + \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}}.
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Première hypothèse. $\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}}$ *est différent de zéro.*

40. L'équation (9) pourra s'écrire de la manière suivante, en formant le carré par rapport à la variable y_1,

$$\begin{aligned}
\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 &+ \left[\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{11}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}\right)^2\right] y_2^2 \\
&+ \left[\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}}\right)^2\right] y_3^2 \\
&- 2\left[\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}} + \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}\right] y_2 y_3,
\end{aligned}$$

où

$$Y_1 = \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} y_1 - \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}} y_2 - \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} y_3;$$

et si l'on a égard aux relations (12), elle prendra la forme définitive

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} \\ &= Y_1^2 + \varphi_0 \left(\frac{dR}{da_{33}} y_2^2 - 2\frac{dR}{da_{23}} y_2 y_3 + \frac{dR}{da_{22}} y_3^2\right).\end{aligned}\right.$$

Nous distinguerons alors plusieurs cas.

41. Premier cas. $\frac{dR}{da_3}$ *est différent de zéro.*

Il viendra, en formant le carré par rapport à y_2,

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} Y_2 + \varphi_0 \frac{\frac{dR}{da_{22}}\frac{dR}{da_{33}} - \left(\frac{dR}{da_{23}}\right)^2}{\frac{dR}{da_{33}}} y_3^2,$$

après avoir posé

$$\frac{dR}{da_{33}} Y_2 = \frac{dR}{da_{33}} y_2 - \frac{dR}{da_{23}} y_3.$$

Enfin, si l'on a égard à l'identité

$$(14)\qquad R\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = \frac{dR}{da_{22}}\frac{dR}{da_{33}} - \left(\frac{dR}{da_{23}}\right)^2,$$

l'équation précédente s'écrira

$$(15)\quad \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} Y_2^2 + \varphi_0 \frac{R\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}}}{\frac{dR}{da_{33}}} y_3^2.$$

Or, pour que le second membre de cette équation ne puisse pas s'annuler, il faut et il suffit que tous les termes soient positifs, puisque le premier est essentiellement positif. En effet, il ne pourrait alors devenir nul que pour $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, ce qu'on ne saurait admettre, car, dans ce cas, les équations (1) et (2) seraient incompatibles; et l'on sait qu'il passe toujours une droite par un point donné.

Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} \gtrless 0 \quad \text{et} \quad \frac{dR}{da_{33}} \gtrless 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait :

1°. $$\varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} > 0;$$

2°. $$R \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} > 0.$$

42. Second cas. $\frac{dR}{da_{33}}$ *est nul.*

L'équation (13) donne alors

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \left(\frac{dR}{da_{22}} y_3^2 - 2 \frac{dR}{da_{23}} y_2 y_3 \right);$$

ou, en ordonnant par rapport à y_3,

$$(16)\quad \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} Y_2^2 - \varphi_0 \frac{\left(\frac{dR}{da_{23}}\right)^2}{\frac{dR}{da_{22}}} y_2^2.$$

Ici

$$\frac{dR}{da_{22}} Y_2 = \frac{dR}{da_{22}} y_3 - \frac{dR}{da_{23}} y_2.$$

On voit que le second membre de l'équation (16) contiendra toujours un terme négatif, tant que $\frac{dR}{da_{23}}$ ne sera pas nul, et, par suite, il sera toujours possible de l'annuler.

Soit

$$\frac{dR}{da_{23}} = 0;$$

la relation (14) nous montre que R et $\frac{dR}{da_{23}}$ sont nuls en même temps, puisqu'on a supposé $\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}}$ différent de zéro. L'équation (16) se réduit alors à

$$(17) \qquad \alpha_4^2 V \frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} Y_2^2.$$

Le point sera intérieur si, $\frac{dR}{da_{22}}$ n'étant pas nul, le produit $\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}}$ est positif; si $\frac{dR}{da_{22}}$ était nul, on pourrait évidemment annuler le second membre de l'équation (17).

Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}} \gtrless 0$$

et

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait :

1°. $$R = 0,$$

2°. $$\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} > 0.$$

Seconde hypothèse. $\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}}$ *est nul et* $\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}}$ *est différent de zéro.*

13. L'équation (9) donne, en formant le carré par

rapport à y_2,

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = Y_1^2$$

$$- \left(\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}\right)^2 y_1^2 + \left[\frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{23}}\right)^2\right] y_3^2$$

$$- 2\left[\frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} + \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{13}}\right] y_1 y_3$$

où

$$(18) \qquad Y_1 = \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} y_2 - \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}} y_1 - \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}} y_3;$$

et, en ayant égard aux relations (12),

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} \\ &= Y_1^2 + \varphi_0 \left(\frac{dR}{da_{33}} y_1^2 - 2 \frac{dR}{da_{13}} y_1 y_3 + \frac{dR}{da_{11}} y_3^2\right). \end{aligned}\right.$$

Or, de la première des identités (12), il résulte que $\varphi_0 \frac{dR}{da_{33}}$ est négatif; par conséquent, le second membre de l'équation (18) renfermera toujours un carré précédé du signe moins; et, par suite, ce second membre pourra toujours s'annuler tant que $\frac{dR}{da_{33}}$ ne sera pas nul.

Soit donc

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

d'où il suit (n° 12)

$$\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}} = 0,$$

et réciproquement; l'équation (18) devient

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \left(\frac{dR}{da_{11}} y_3^2 - 2 \frac{dR}{da_{13}} y_1 y\right)$$

ou bien encore

$$(19)\qquad a_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = V_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} Y_2^2 - \varphi_0 \frac{\left(\frac{dR}{da_{13}}\right)^2}{\frac{dR}{da_{11}}} y_1^2.$$

On voit que le second membre de cette dernière équation contiendra toujours un terme négatif tant que $\frac{dR}{da_{13}}$ ne sera pas nul, et dès lors on pourra l'annuler.

Soit

$$\frac{dR}{da_{13}} = 0;$$

cette hypothèse jointe à

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

et introduite dans la formule

$$(20)\qquad R \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = \frac{dR}{da_{11}} \frac{dR}{da_{33}} - \left(\frac{dR}{da_{13}}\right)^2,$$

donne

$$(21)\qquad R = 0;$$

et l'équation (19) se réduit à

$$(22)\qquad \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} Y_2^2.$$

Le point sera intérieur si, $\frac{dR}{da_{11}}$ n'étant pas nul, le produit $\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}}$ est positif; si $\frac{dR}{da_{11}}$ était nul, on pourrait évidemment annuler le second membre de l'équation (22). Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2 R}{da_{22}\, da} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 R}{da_{11}\, da} \gtrless 0,$$

il faut et il suffit que :

1°. $$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

2°. $$R = 0,$$

3°. $$\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} = 0.$$

Troisième hypothèse.

$$\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = 0, \quad \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = 0, \quad \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} \text{ différent de zéro.}$$

43. L'équation (9) donne, en ordonnant par rapport à y_3,

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} \\ & = Y_1^2 - \left(\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}}\right)^2 y_1^2 - \left(\frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}}\right)^2 y_2^2 \\ & - 2 y_1 y_2 \left[\frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}} + \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}}\right]; \end{aligned} \right.$$

après avoir posé

$$Y_1 = \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} y_3 - \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} y_1 - \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}} y_2.$$

Or les relations (12) conduisent à

$$\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} = - \left(\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}}\right)^2,$$

$$\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} = - \left(\frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}}\right)^2;$$

ce qui montre que $\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}}$ et $\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}}$ sont négatifs.

On voit, d'un autre côté, qu'il sera toujours possible d'annuler le second membre de l'équation (23).

Ainsi, dans cette dernière hypothèse, le point ne saurait être intérieur.

Résumé.

44. Si $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$, sont les coordonnées d'un point, et si les quantités A_1, A_2, A_3, A_4, φ_0 et R sont définies par les équations (4) et (8),

Pour que *ce point soit intérieur,* il faut et il suffit que :

I°. Si $\frac{dR}{da_{33}} \gtrless 0$, on ait (en même temps)

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} > 0, \\ &R \frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}} > 0. \end{aligned}\right.$$

II°. Si $\frac{dR}{da_{33}} = 0$, il faut qu'on ait

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{d'abord} & R = 0, \\ \text{puis} & \left\{\begin{array}{ll} \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} > 0, & \text{si} \quad \frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}} \gtrless 0, \\ \text{ou} & \\ \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} > 0, & \text{si} \quad \frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}} = 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Lorsque φ_0 est nul, le point est *sur la surface;* dans toutes les autres circonstances, le point sera *extérieur.*

La suite prochainement.