NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE MONTEBELLO

Seconde solution de la question 458

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 66-68

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__66_0>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 458

(voir tome XVII, page 463);

PAR M. DE MONTEBELLO,
Élève de mathématiques spéciales a l'institution des Carmes
(classe de M. Gerono).

La limite de

$$(1)\qquad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

est l 2 pour $n=\infty$. (CATALAN.)

Je pose

$$n=2^m,$$

m pouvant être quelconque, mais 2^m restant toujours entier. Je cherche d'abord la limite de l'expression (1) quand m devient infini en restant entier.

Posons

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^{m+1}-1}+\frac{1}{2^{m+1}},$$

$$B=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^{m+1}-1}-\frac{1}{2^{m+1}},$$

on aura

$$A-B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^m},$$

donc

$$B=A-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m}\right),$$

$$B=\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\ldots+\frac{1}{2^{m+1}-1}+\frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

Ceci est vrai quelque grand que soit m, et à la limite, B devient l 2; on aura donc

$$\mathrm{l}\,2 = \lim\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right),$$

n étant toujours une puissance entière de 2.

Maintenant je vais prouver que la limite est la même lorsque m devient infini en passant par des valeurs quelconques, mais 2^m ou n restant toujours entier.

Remarquons d'abord que lorsque n augmente, l'expression (1) augmente. Remplaçons, en effet, n par $n+1$, cette expression devient

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2};$$

l'accroissement qu'elle subit

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

est positif, car il est plus grand que

$$\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

qui est zéro.

Cela posé, supposons m compris entre deux nombres entiers p et $p+1$.

$$\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}}$$

sera compris entre

$$\frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} + \ldots + \frac{1}{2^{p+1}}$$

et

$$\frac{1}{2^{p+1}+1} + \frac{1}{2^{p+1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{p+2}}.$$

Les deux dernières expressions ont pour limite $l\,2$; donc la précédente expression, qui est constamment comprise entre les deux autres, a la même limite. Donc enfin on a

$$\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=l\,2.$$

Note. MM. Siebel, de Lausanne, Hatterer, maître répétiteur à Clermont, Astier, de Lyon, Martelli, de Milan, ont adressé des solutions à peu près semblables à la précédente ; celle de M. Siebel est en allemand.