

DE MONTEBELLO

Seconde solution de la question 458

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 66-68

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__66_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 458

(voir tome XVII, page 463) ;

PAR M. DE MONTEBELLO,

Élève de mathématiques spéciales à l'institution des Carmes
(classe de M. Gerono).

La limite de

$$(1) \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

est 1/2 pour $n = \infty$. (CATALAN.)

Je pose

$$n = 2^m,$$

m pouvant être quelconque, mais 2^m restant toujours entier. Je cherche d'abord la limite de l'expression (1) quand m devient infini en restant entier.

Posons

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}-1} + \frac{1}{2^{m+1}},$$

$$B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}-1} - \frac{1}{2^{m+1}},$$

on aura

$$A - B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m},$$

donc

$$B = A - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m - 1} + \frac{1}{2^m} \right),$$

$$B = \left(\frac{1}{2^m + 1} + \frac{1}{2^m + 2} + \dots + \frac{1}{2^{m+1} - 1} + \frac{1}{2^{m+1}} \right).$$

Ceci est vrai quelque grand que soit m , et à la limite, B devient 12; on aura donc

$$12 = \lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right),$$

n étant toujours une puissance entière de 2.

Maintenant je vais prouver que la limite est la même lorsque m devient infini en passant par des valeurs quelconques, mais 2^m ou n restant toujours entier.

Remarquons d'abord que lorsque n augmente, l'expression (1) augmente. Remplaçons, en effet, n par $n+1$, cette expression devient

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2};$$

l'accroissement qu'elle subit

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

est positif, car il est plus grand que

$$\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

qui est zéro.

Cela posé, supposons m compris entre deux nombres entiers p et $p+1$.

$$\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}$$

sera compris entre

$$\frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} + \dots + \frac{1}{2^{p+1}}$$

et

$$\frac{1}{2^{p+1}+1} + \frac{1}{2^{p+1}+2} + \dots + \frac{1}{2^{p+2}}.$$

Les deux dernières expressions ont pour limite 12 ; donc la précédente expression, qui est constamment comprise entre les deux autres, a la même limite. Donc enfin on a

$$\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = 12.$$

Note. MM. Siebel, de Lausanne, Hatterer, maître répétiteur à Clermont, Astier, de Lyon, Martelli, de Milan, ont adressé des solutions à peu près semblables à la précédente ; celle de M. Siebel est en allemand.