Nouvelles annales de mathématiques

Michaux

Solution de la question 453

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 68-71

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__68_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 455

(voir t. XVII, p. 434).

PAR M. MICHAUX,
Élève du lycée Charlemagne.

$$L(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + L(n+1),$$

$$L = \text{log népérien}.$$

(SCHLOMILCH.)

En désignant par x une quantité positive comprise entre 0 et 1, on a la série convergente à termes alternativement positifs et négatifs

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

d'où l'on déduit pour x les deux limites

$$x > L(1+x), \quad x < L(1+x) + \frac{x^2}{2}.$$

On aura donc généralement, si p est positif et supérieur à 1,

$$(1)\qquad L\left(1+\frac{1}{p}\right)<\frac{1}{p}<L\left(1+\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}.$$

Remplaçant p successivement par 1, 2, 3,..., n dans ces inégalités (1), ajoutant membre à membre les nouvelles inégalités obtenues, et posant, pour abréger,

$$L\left(1+\frac{1}{1}\right)+L\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+L\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$$=\Sigma.L\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

on voit que

$$\Sigma.L\left(1+\frac{1}{p}\right)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\Sigma.L\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right\}.$$

Or

$$L\left(1+\frac{1}{p}\right)=L\frac{p+1}{p},$$

et la somme des logarithmes de plusieurs quantités est égale aux logarithmes du produit de ces mêmes quantités, on aura donc

$$\Sigma.L\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$$=L\left(1+\frac{1}{1}\right)+L\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+L\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=L\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\,\frac{n+1}{n}=L(n+1).$$

Ainsi

$$L(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < L(n+1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right\}.$$

Cela posé, les termes de la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

prolongée indéfiniment, peuvent être groupés ainsi

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{1^2} + \left[\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}\right] + \left[\dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{6^2} + \dfrac{1}{7^2}\right] + \ldots \\ \quad + \left[\dfrac{1}{(2^k)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2^{k+1}-1)^2}\right], \end{array}\right.$$

et comme l'on a généralement

$$\frac{1}{(2^k)^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2} < 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^2} = \frac{1}{2^k},$$

on voit que la somme des termes de la série (2) prolongée indéfiniment est plus petite que la somme des termes de la progression géométrique décroissante indéfinie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

et comme cette dernière série a pour somme 2, nous avons enfin

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right\} < 1.$$

Donc on peut écrire

$$L(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + L(n+1).$$

C. Q. F. D.

Remarque. On voit que la série

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

prolongée indéfiniment a pour somme $\frac{\pi^2}{6}$. Donc on pourrait remplacer la limite supérieure $1+L(n+1)$ par la limite plus faible $L(n+1)+\frac{\pi^2}{6}$ (*).

Note. MM. Cornet, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), et Gérard, élève de l'institution des Carmes (classe de M. Gerono) ont résolu à peu près la question de la même manière.