A. CORNU

Note sur les sections toriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 101-108

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__101_0>

NOTE SUR LES SECTIONS TORIQUES;

PAR M. A. CORNU (*),
Elève à Sainte-Barbe (classe de M. Gerono).

On peut mener au tore une infinité de plans tangents qui coupent la surface : toutes ces sections, remarquables par la variété de leur forme, jouissent d'une propriété commune dont voici l'énoncé :

La section du tore par un plan tangent est la podaire d'une conique, le pôle étant sur l'axe non focal.

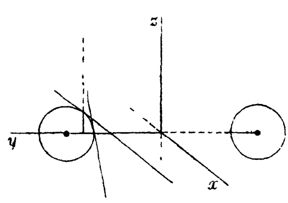
L'équation du tore ayant l'axe des z pour axe de révolution et le centre du cercle méridien sur l'axe des x es

$$(\sqrt{x^2+y^2}-d)^2+z^2=r^2. \tag{1}$$

Il s'agit d'obtenir la forme la plus simple de l'équation de la section.

La surface étant de révolution, il suffit de considérer une série de plans tangents suivant un méridien. Prenons le méridien qui est dans le plan des zy.

Ce plan coupe le tore suivant deux cercles égaux dont l'axe des y est la ligne des centres. Il est facile de voir



que tout plan tangent au tore suivant l'un de ces cercles

(*) Admis le 8e à l'École Polytechnique, au concours de 1860.

est parallèle à l'axe des x et que sa trace sur le plan des zy est une droite tangente à la circonférence.

Cette tangente, et par conséquent ce plan tangent, a pour équation

$$(y - d) = mz - r\sqrt{m^2 + 1}$$

(si l'on désigne par m la tangente trigonométrique de l'angle que fait la droite avec l'axe des z).

En éliminant z entre cette équation et celle du tore, on obtient pour la projection de la section sur le plan zy

$$(2)\qquad \left[\sqrt{x^2 - y^2} - d\right]^2 + \left[\frac{y - d + r\sqrt{m^2 + 1}}{m}\right]^2 = r^2.$$

Dans cette projection les dimensions de la figure sont inégalement altérées; les x se projettent en vraie grandeur, les y sont multipliés par le cosinus de l'angle que forme le plan de la courbe avec le plan des xy; cet angle est évidemment le complément de l'angle dont la tangente est m : pour obtenir la section en vraie grandeur, il suffirait de changer y en $y \times \sin \operatorname{arc\,tang} m$, c'est-à-dire en $y \times \dfrac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$.

Mais, avant d'opérer cette substitution, il convient de transporter l'axe des z parallèlement à lui-même, de manière qu'il passe par le point de contact; l'équation de la section sera beaucoup plus simple.

Les coordonnées du point de contact sont

$$z_1 = r \sin \operatorname{arc\,tang} m,$$

$$y_1 = d - r \cos \operatorname{arc\,tang} m = d - \frac{r}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Changeons donc y en $\left(y + d - \dfrac{r}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)$ dans l'équation (2) où z n'entre pas, on obtient

$$\left[\sqrt{x^2+\frac{\left(y\sqrt{m^2+1}+d\sqrt{m^2+1}-r\right)^2}{\sqrt{m^2+1}}}-d\right]^2$$

$$+\left[\frac{y\sqrt{m^2+1}+rm}{m.\sqrt{m^2+1}}\right]^2=r^2.$$

Remplaçant maintenant y par $\frac{my}{\sqrt{m^2+1}}$,

$$\left[\sqrt{x^2+\frac{\left(my+d\sqrt{m^2+1}-r\right)^2}{m^2+1}}-d\right]^2+\frac{[y+rm]^2}{m^2+1}=r^2.$$

Développant et élevant au carré on trouve, réductions faites :

$$(x^2+y^2)^2+\frac{4md}{\sqrt{m^2+1}}y.(x^2+y^2)+4y^2\left[d^2-\frac{dr}{\sqrt{m^2+1}}\right]$$

$$-\frac{4dr}{\sqrt{m^2+1}}x^2=0.$$

Comme

$$m=\operatorname{tang}\alpha$$

(α angle du plan tangent avec le plan des xz), on a

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}=\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\cos\alpha,$$

et par conséquent

$$(3)\left\{\begin{array}{l}(x^2+y^2)^2+4d\sin\alpha.y.(x^2+y^2)+4y^2(d^2-dr\cos\alpha)\\ \qquad -4drx^2\cos\alpha=0\ (*).\end{array}\right.$$

(*) Les termes du quatrième degré forment un carré parfait, c'est donc une podaire de conique. Tm.

Or, l'équation de la podaire d'une conique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y+y')^2}{b^2}=1,$$

l'origine des coordonnées étant le pôle, est

$$(x^2+y^2)^2+2y'.y.(x^2+y^2)+y^2(y'^2-b^2)-a^2x^2=0.$$

Identifions les deux équations :

$$y'=2d\sin\alpha,$$
$$y'^2-b^2=4d^2-4dr\cos\alpha,$$
$$a^2=4dr\cos\alpha.$$

Retranchons la seconde du carré de la première, il vient

$$b^2=4d\cos\alpha(r-d\cos\alpha).$$

On a donc les deux axes de la conique; la distance du pôle y' situé sur l'axe b au centre de la courbe est

$$2d\sin\alpha.$$

Ainsi toute section torique par un plan tangent est la podaire d'une conique, le pôle étant situé sur l'axe non focal.

Nous allons voir que la réciproque est aussi générale.

En effet, on a

$$4d^2=a^2-b^2+y'^2,$$

valeur toujours réelle si $a>b$. Divisant y' par a^2, on trouve

$$\frac{\tan\alpha}{r}=\frac{2y'}{a^2}.$$

Or tang α sera toujours réel, car on a

$$\sin\alpha = \frac{y'}{d} = \frac{2y'}{\sqrt{c^2 + y'^2}}.$$

Il est facile de voir que, pour obtenir toutes les sections, il suffit de faire varier α de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

D'où l'on conclut que a^2 sera toujours positif, mais que b^2 ne sera positif que quand on aura

$$\cos\alpha < \frac{r}{d},$$

c'est-à-dire que la section sera la podaire d'une ellipse tant que l'inclinaison du plan tangent sur le plan des xz sera plus grande que arc cos $\frac{r}{d}$.

Au delà, la section sera la podaire d'une hyperbole. L'inclinaison limite correspond au cas où le plan tangent passe par le centre, comme on peut le voir facilement.

Sans entrer dans la discussion des courbes, qui d'ailleurs est extrêmement simple, nous aurons une idée de leur forme en donnant à α différentes valeurs.

$\alpha = 0$. Le plan tangent est parallèle à l'axe. L'équation (3) devient

$$(x^2 + y^2)^2 + 4dy^2(d - r) - 4drx^2 = 0,$$

équation d'une courbe passant par l'origine.

C'est la podaire d'une hyperbole si $d > r$, car

$$b^2 = 4d(r - d):$$

le pôle est au centre. Le système des tangentes à l'origine est

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{r}{d - r}}.$$

La courbe devient une lemniscate de Bernoulli pour

$$d = 2r,$$

l'hyperbole est équilatère; car

$$\begin{cases} a^2 = 4dr = 8r^2, \\ b^2 = 4dr = -8r^2. \end{cases}$$

Si $d < r$, la section sera toujours une podaire d'ellipse.

Supposons que le plan tangent se meuve de manière que α augmente de 0° à arc cos $\frac{r}{d}$.

La section sera une podaire d'hyperbole dont l'axe focal a^2 varie de $4dr$ à $4r^2$, dont l'axe imaginaire b^2 varie de $4d(r-d)$ à o.

Le pôle d'ailleurs s'éloigne du centre jusqu'à la distance

$$2d \sin \operatorname{arc} \cos \frac{r}{d} = 2\sqrt{d^2 - r^2}.$$

Quand le plan passe par le centre, l'hyperbole podaire de la section s'est réduite à ses deux sommets, la podaire devient un système de deux circonférences; en effet, l'équation est le produit des deux facteurs

$$x^2 + y^2 + 2y\sqrt{d^2 - r^2} - 2rx = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2y\sqrt{d^2 - r^2} + 2rx = 0.$$

Elles sont symétriquement placées par rapport à l'axe des x passant par l'origine; les coordonnées des centres sont

$$x_1 = \pm r,$$
$$y_1 = -\sqrt{d^2 - r^2};$$

le rayon est donc

$$\sqrt{(d^2 - r^2) + r^2} = d$$

C'est la section découverte par M. Yvon Villarceau.

Si le plan tangent continue à se mouvoir jusqu'à ce que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les sections sont des podaires d'ellipses dont l'axe focal a^2 varie de $4r^2$ à o; dont l'axe b^2 varie de o à r^2, puis revient à o.

La distance du pôle au centre de l'ellipse augmente et converge vers $2d$.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'ellipse se réduit à un point, la section devient un système de deux cercles qui coïncident : en effet, l'équation est un carré parfait :

$$(x^2 + y^2 + 2dy)^2 = 0,$$

cercle tangent à l'axe des x à l'origine et dont le rayon est d.

Jamais la section n'est une podaire de cercle dont le pôle est en dehors du centre, c'est-à-dire qu'on n'obtient jamais de *conchoïde de cercle* ni d'*épicycloïde*; car a^2 ne peut pas devenir égal à b^2, excepté pour $a = b = 0$.

Il y a cependant une section curieuse quand le plan est tangent à l'extrémité de l'ombilic du tore lorsque $d < r$; la courbe de section présente alors un point de rebroussement de première espèce. C'est une podaire d'ellipse dont le pôle est au sommet du petit axe. C'est la podaire elliptique correspondante à la podaire circulaire nommée *conchoïde de cercle* ou *limaçon de Pascal*.

Remarque. Toutes ces courbes ont pour diamètre curviligne, divisant en parties égales les cordes passant par l'origine, un cercle dont le rayon est $d \sin \alpha$: en effet, transformons les coordonnées rectilignes en coordonnées polaires, et divisons par ρ^2,

$$\rho^2 + 4d\rho\sin\alpha\sin\omega + 4[d^2 - dr\cos\alpha]\sin^2\omega - 4dr\cos\alpha\cos^2\omega = 0,$$

$$\rho = -2d\sin\alpha\sin\omega \pm \sqrt{}.$$

C. Q. F. D.