NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DESGRANGES

Concours d'admission à l'École normale en 1860 (voir t. XIX, p. 328 et 436)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 126-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__126_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1860

(voir t. XIX, p. 328 et 436);

PAR M. DESGRANGES.

Question généralisée. Un cône de révolution est coupé par un plan. Si par tous les points de l'intersection on mène des droites qui rencontrent l'*axe* du cône sous un angle *constant*, chacune de ces droites perce la surface du cône en un second point.

Quelle est la courbe formée par ces seconds points?

Solution analytique. Soient

$$(1) \qquad y^2+x^2=(az-r)^2$$

l'équation du cône;

$$(2) \qquad z=mx$$

l'équation du plan sécant, et k la cotangente de l'angle constant. L'équation de la surface formée par toutes les droites est

$$(3) \quad (x^2+y^2)(z-kamx+kr)^2=[(az-r)mx-k(x^2+y^2)]^2.$$

Les deux intersections de cette surface avec le cône (1) ont pour équations :

$$1^\circ \qquad y^2+x^2=(az-r)^2 \quad \text{et} \quad z=mx,$$

c'est l'intersection donnée;

$$2^\circ \quad y^2+x^2=(az-r)^2 \quad \text{et} \quad z=-mx-\frac{2kr}{1-ka},$$

c'est l'intersection cherchée.

La courbe cherchée est donc semblable à l'intersection donnée. Les plans des deux courbes sont perpendiculaires à une section principale du cône, ils sont également inclinés sur l'axe du cône, mais en sens contraire.

C. Q. F. T.

Tout cône de révolution qui a même sommet que le cône primitif coupe la surface (3) suivant deux coniques semblables *entre elles* et de même espèce que l'intersection donnée.

Si dans l'équation (3) on fait $k=a$, on aura l'équation de la surface formée par les normales.

Si a devient zéro, le cône donné devient un cylindre.

On a alors une surface que tous les cylindres de révolution concentrique à l'axe des z coupent suivant deux ellipses égales, etc.

Cette surface est identique à celle qui a pour directrices : 1° la base d'un cylindre de révolution; 2° une des arêtes de ce cylindre et dont la génératrice fait un angle constant avec cette arête.

Elle peut encore être engendrée par une droite qui tourne autour d'une autre qu'elle rencontre sous un angle constant, le point d'intersection marchant sur la droite fixe de quantités proportionnelles au sinus de l'angle que décrit le plan des deux droites.

Quand on a en même temps $a=0$, $k=0$, tous les plans des ellipses suivant lesquelles la surface est coupée par les cylindres de révolution concentriques aux z se coupent suivant une même ligne, toutes les ellipses ont leur petit axe sur cette ligne et ont leurs centres en un même point de cette ligne.

Nota. Pour le cas où le plan sécant est vertical, l'équation (3) ne donne qu'un cas particulier.

Mais si l'on prend les équations

$$y^2 + x^2 = (az - r)^2,$$

$$x = P,$$

l'équation de la surface est

$$x^2(az - r)^2 = (x^2 + y^2)[kax - P(ka - 1)]^2.$$

On voit bien que tout cône de révolution ayant même axe et même sommet que le cône donné coupe la surface suivant deux hyperboles dont les plans sont verticaux et perpendiculaires à une section principale du cône donné.

Remarques générales.

Si l'on fait tourner le plan des xz autour de l'axe des z, toute droite du plan qui rencontre l'axe des z décrira un cône de révolution. Mais si l'intersection de la droite avec l'axe, au lieu de rester fixe, se meut sur l'axe de telle sorte que sa distance z' à l'origine varie en même temps que l'angle B du plan mobile avec le plan des xz, en un mot que l'on ait

$$z' = \varphi(\mathrm{B})$$

(φ représentant une fonction quelconque) pour

$$z' = \operatorname{tang} \mathrm{B} \quad \text{et} \quad k = 0,$$

on a, comme on sait, le paraboloïde gauche isocèle.

Il est clair que pour chaque espèce de fonction φ on aura une espèce particulière de surfaces dont l'équation est de la forme

$$z + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

k étant, comme on l'a supposé, la cotangente de l'angle que la génératrice fait avec les z.

La surface représentée par l'équation (3) est une de ces espèces de surfaces. On a dans ce cas

$$z' = \frac{rm(1 + ka)\cos B}{1 + am\cos B}.$$

On peut supposer que k, au lieu d'être constant, varie avec B. On a alors un genre de surfaces représentées par l'équation générale

$$z + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cette dernière équation représente toutes les surfaces gauches qui peuvent être coupées par un plan suivant une droite qui rencontre toutes les génératrices (rectilignes, bien entendu).

Ainsi, pour prendre un cas simple, l'équation

$$z - N\frac{y}{x} = M\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \times \sqrt{x^2 + y^2}$$

est l'équation d'un hyperboloïde à une nappe;

$$z - N\frac{y}{z} = 0$$

l'équation d'un paraboloïde gauche isocèle, etc.