Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Relations entre les diamètres conjugués d'une surface du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 130-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__130_0>

RELATIONS ENTRE LES DIAMÈTRES CONJUGUÉS D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. PAINVIN,
Professeur au lycée de Douai.

1. *Lemme.* Pour que la fonction

$$\begin{gathered} A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{33} X_3^2 \\ + 2 A_{12} X_1 X_2 + 2 A_{13} X_1 X_3 + 2 A_{23} X_2 X_3 \end{gathered}$$

se réduise à la somme de *deux carrés*, il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

2. Prenons une surface du second degré rapportée à son centre

$$(1) \qquad \left\{ \begin{gathered} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 \\ + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = h; \end{gathered} \right.$$

désignons par S le premier membre de cette équation, et par

$$\alpha_1 = \cos(x_2 o x_3), \quad \alpha_2 = \cos(x_3 o x_1), \quad \alpha_3 = \cos(x_1 o x_2)$$

les angles que font entre eux les axes ox_1, ox_2, ox_3.

Soit maintenant

$$(2) \qquad \left\{ \begin{gathered} b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 \\ + 2 b_{12} y_1 y_2 + 2 b_{13} y_1 y_3 + 2 b_{23} y_2 y_3 = h, \end{gathered} \right.$$

la forme que prend l'équation (1) lorsqu'on rapporte la surface à de nouveaux axes oy_1, oy_2, oy_3; désignons par T le premier membre de cette équation, et par

$$\beta_1 = \cos(y_2\, oy_3), \quad \beta_2 = \cos(y_3\, oy_1), \quad \beta_3 = \cos(y_1\, oy_2)$$

les angles que font entre eux les nouveaux axes.

Considérons en outre les deux fonctions

$$M = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha_3\, x_1\, x_2 + 2\alpha_2\, x_1\, x_3 + 2\alpha_1\, x_2\, x_3,$$

$$N = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2\beta_3\, y_1\, y_2 + 2\beta_2\, y_1\, y_3 + 2\beta_1\, y_2\, y_3,$$

qui représentent : la première, la distance d'un point à l'origine dans le système des axes primitifs ; la seconde, la distance du même point à la même origine dans le nouveau système d'axes.

Quand on passe du système primitif au système nouveau, la fonction S se change en T et la fonction M en N ; par suite, la fonction $S + \lambda M$ se change en $T + \lambda N$, quelle que soit l'indéterminée λ. Donc, si, pour une certaine valeur de λ, la fonction $S + \lambda M$ devient la somme de deux carrés, pour cette même valeur de λ, la fonction $T + \lambda N$ deviendra aussi la somme de deux carrés. Par conséquent, si l'on exprime que les deux fonctions $S + \lambda M$, $T + \lambda N$ se réduisent à la somme de deux carrés, les deux équations en λ ainsi obtenues, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} + \lambda\alpha_3 & a_{13} + \lambda\alpha_2 \\ a_{21} + \lambda\alpha_3 & a_{22} + \lambda & a_{23} + \lambda\alpha_1 \\ a_{31} + \lambda\alpha_2 & a_{32} + \lambda\alpha_1 & a_{33} + \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} + \lambda & b_{12} + \lambda\beta_3 & b_{13} + \lambda\beta_2 \\ b_{21} + \lambda\beta_3 & b_{22} + \lambda & b_{23} + \lambda\beta_1 \\ b_{31} + \lambda\beta_2 & b_{32} + \lambda\beta_1 & b_{33} + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

devront avoir les mêmes racines en λ, être identiques.

3. **Posons**

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}$$

C'est le carré du volume du parallélipipède construit suivant les trois axes ox_1, ox_2, ox_3 avec des longueurs égales à l'unité.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$B = \frac{d\Delta}{da_{11}} + \frac{d\Delta}{da_{22}} + \frac{d\Delta}{da_{33}} + 2\alpha_1 \frac{d\Delta}{da_{23}} + 2\alpha_2 \frac{d\Delta}{da_{31}} + 2\alpha_3 \frac{d\Delta}{da_{12}},$$

$$\begin{aligned} C = {} & a_{11}(1-\alpha_1^2) + a_{22}(1-\alpha_2^2) + a_{33}(1-\alpha_3^2) \\ & + 2a_{12}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3) + 2a_{13}(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2) + 2a_{23}(\alpha_2 a_3 - \alpha_1); \end{aligned}$$

les quantités A, B, C, Δ sont des quantités connues et constantes qui ne dépendent que des coefficients de l'équation primitive et des angles des anciens axes.

En exprimant que les deux équations ci-dessus ont les mêmes racines, on arrive aux trois relations fondamentales suivantes entre les coefficients de l'équation primitive et ceux de l'équation transformée :

$$\text{(I)} \qquad \Theta = \frac{\Delta}{A} \cdot V,$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \qquad & \frac{d\Theta}{db_{11}} + \frac{d\Theta}{db_{22}} + \frac{d\Theta}{db_{33}} + 2\beta_1 \frac{d\Theta}{db_{23}} + 2\beta_2 \frac{d\Theta}{db_{41}} \\ & + 2\beta_3 \frac{d\Theta}{db_{12}} = \frac{B}{A} \cdot V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \qquad & b_{11}(1-\beta_1^2) + b_{22}(1-\beta_2^2) + b_{33}(1-\beta_3^2) \\ & + 2b_{12}(\beta_1\beta_2 - \beta_3) + 2b_{13}(\beta_1\beta_3 - \beta_2) \\ & + 2b_{23}(\beta_2\beta_3 - \beta_1) = \frac{C}{A} \cdot V. \end{aligned}$$

Dans ces relations, je désigne par Θ et V les expressions suivantes :

$$\Theta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & \beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_1 & 1 \end{vmatrix}$$

C'est le carré du volume du parallélipipède construit suivant les axes oy_1, oy_2, oy_3 avec des longueurs égales à l'unité.

4. Première application. Si les trois nouveaux axes sont trois diamètres conjugués, on devra avoir

$$b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0,$$

et l'équation (2) prendra la forme

$$b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = h.$$

Or, si l'on désigne par a_1, a_2, a_3 les longueurs des trois diamètres conjugués, on aura

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} b_{11} &= \frac{h}{a_1^2}, \\ b_{22} &= \frac{h}{a_2^2}, \\ b_{33} &= \frac{h}{a_3^2}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette hypothèse particulière les relations (I), (II), (III) deviennent

$$(\text{I } bis)\qquad b_{11}b_{22}b_{33} = \frac{\Delta}{A}\cdot V,$$

$$(\text{II } bis)\qquad b_{22}b_{33} + b_{33}b_{11} + b_{11}b_{22} = \frac{B}{A}\cdot V,$$

$$(\text{III } bis)\qquad b_{11}(1-\beta_1^2) + b_{22}(1-\beta_2^2) + b_{33}(1-\beta_3^2) = \frac{C}{A}\cdot V.$$

Or, en introduisant les valeurs (3) et en remarquant que $V a_1^2 a_2^2 a_3^2$ est le carré du volume du parallélipipède construit suivant les trois axes oy_1, oy_2, oy_3, avec des longueurs respectivement égales aux longueurs des demi-diamètres, la relation (I *bis*) donne

$$V a_1^2 a_2^2 a_3^2 = \frac{A h^3}{\Delta} = \text{constante} = a^2 b^2 c^2,$$

a, b, c désignant les trois demi-axes de la surface.

La relation (II *bis*) donne

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{B}{A} \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2 V}{h^2} = \frac{Bh}{\Delta} = a^2 + b^2 + c^2.$$

La relation (III *bis*) conduit à

$$a_2^2 a_3^2 (1 - \beta_1^2) + a_3^2 a_1^2 (1 - \beta_2^2) + a_1^2 a_2^2 (1 - \beta_3^2)$$
$$= \frac{C}{Ah} V a_1^2 a_2^2 a_3^2 = \frac{Ch^2}{\Delta} = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2.$$

D'où l'on conclut ces trois théorèmes :

1° *Le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués quelconques est constant.*

2° *La somme des carrés de trois diamètres conjugués quelconques est constante.*

3° *La somme des carrés des surfaces des trois parallélogrammes construits avec trois diamètres conjugués quelconques est constante.*

5. Seconde application. Si les trois nouveaux axes sont rectangulaires, on a

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

et

$$b_{11} = \frac{h}{a_1^2}, \quad b_{22} = \frac{h}{a_2^2}, \quad b_{33} = \frac{h}{a_3^2}.$$

Une seule des relations ci-dessus, la relation (III), ne dépend que des quantités b_{11}, b_{22}, b_{33} ; elle donne alors

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = \frac{C}{A}$$

ou

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} = \frac{C}{Ah},$$

c'est-à-dire *la somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques est constante.*