NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DELLACH

Solution des questions 531 et 532

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 174-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__174_1>

SOLUTION DES QUESTIONS 531 ET 532

(voir t. XIX, p. 247);

PAR M. DELLACH,
Professeur au lycée d'Amiens.

531. Soient B l'aire d'un polygone régulier circonscrit, B′ celle du polygone régulier d'un nombre double de côtés : l'aire du cercle est comprise entre B′ et $B' - \frac{1}{3}(B - B')$.

532. Soient A et B les aires de deux polygones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit : l'aire du cercle est comprise entre A et $A + \frac{2}{3}(B - A)$ (*).

Question 531.

Soient AB le demi-côté du polygone régulier de n côtés, AC pour $2n$ côtés, AD pour $4n$ côtés : on obtient ces longueurs en divisant l'angle AOB en deux parties égales et AOC en deux parties égales. Si B, B′, B″, B‴, etc., sont les aires des polygones réguliers de n, $2n$, $4n$, etc., côtés, on a

$$B = 2n.\mathrm{OAB}, \quad B' = 4n.\mathrm{OAC}, \quad B'' = 8n.\mathrm{OAD}.$$

Donc

$$2\,\frac{B - B'}{B' - B''} = \frac{\mathrm{BCE}}{\mathrm{CDF}}.$$

Soit CG la bissectrice de l'angle BCE ; elle sera parallèle à DE. On a

$$\frac{\mathrm{CBE}}{\mathrm{CEG}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EG}} = \frac{\mathrm{CE} + \mathrm{CB}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}.$$

D'un autre côté

$$\frac{\mathrm{CEG}}{\mathrm{CDF}} = \frac{\overline{\mathrm{CE}}^2}{\overline{\mathrm{DF}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{\overline{\mathrm{AD}}^2}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{CBE}}{\mathrm{CDF}} = 2\,\frac{B - B'}{B' - B''} = \frac{\mathrm{AB}.\mathrm{AC}}{\overline{\mathrm{AD}}^2}.$$

Or

$$\mathrm{AC} > 2\,\mathrm{AD}, \quad \mathrm{AB} > 4\,\mathrm{AD},$$

d'où

$$\mathrm{AB}.\mathrm{AC} > 8\,\overline{\mathrm{AD}}^2;$$

(*) C'est une propriété différente de celle de Huyghens. Tm.

de sorte que

$$\frac{B-B'}{B'-B''}>4$$

et

$$B'-B''<\frac{1}{4}(B-B'),$$

$$B''-B'''<\frac{1}{4^2}(B-B'),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on désigne par S l'aire du cercle, on a

$$S=B'-(B'-B'')-(B''-B''')-\ldots.$$

Remplaçant chaque différence par sa limite supérieure, on obtient

$$S>B'-\frac{1}{3}(B-B').$$

C. Q. F. D.

Question 532.

Soient A, A′, A″, etc., les aires des polygones réguliers inscrits de n, $2n$, $4n$, etc., côtés; on a

$$S=A+(A'-A)+(A''-A')+\ldots.$$

On démontrera aisément que

$$A'-A<\frac{1}{2}(B-A),$$

$$A''-A'<\frac{1}{2}(B'-A').$$

Or on sait que

$$B'-A'<\frac{1}{4}(B-A) \quad \text{(problème de Catalan).}$$

Donc

$$A''-A'<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(B-A), \quad A'''-A''<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2}(B-A),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si dans la valeur de S on remplace les différences par ces limites supérieures, on obtient

$$S < A + \frac{2}{3}(B - A).$$

C. Q. F. D.