NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VANNSON

# Équation et propriété de la loxodromie (fin)

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 20 (1861), p. 225-233

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__225_1>

# ÉQUATION ET PROPRIÉTÉ DE LA LOXODROMIE (FIN)

(voir p. 31);

PAR M. VANNSON.

---

*Projection de la loxodromie sur le plan de l'équateur.*

Proposons-nous d'abord de résoudre la question pour une courbe quelconque dont l'équation serait

$$\varphi(xy) = 0,$$

$y$ étant la distance polaire d'un de ses points. Nous prendrons pour axe polaire le diamètre OB passant au zéro des longitudes. Soit M la projection d'un point P de la courbe, posons

$$\text{MO} = \rho, \quad \text{BOM} = \omega,$$

nous aurons

$$x = \omega \quad \text{et} \quad \sin y = \rho \quad \text{ou} \quad y = \text{arc} \sin \rho;$$

l'équation de la projection sera donc

$$\varphi\,(\omega,\ \text{arc}\ \sin\rho) = 0.$$

Si on voulait rapporter la courbe à des coordonnées rectangles, on aurait

$$X = \sin y \cos x \quad \text{et} \quad Y = \sin y \sin x\,;$$

en éliminant $x$ et $y$ entre ces équations et celle de la courbe, on aura celle de la projection ; appliquant ces formules à l'équation de la loxodromie

$$\text{tang}\,\frac{y}{2} = a^x,$$

on tire d'abord de cette équation :

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

L'équation de la projection sera donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a^\omega + a^{-\omega}}{2}.$$

$a$ représentant $e^{-m}$ est moindre que l'unité. La courbe demandée est donc une spirale logarithmique.

Problème. *Étant donnée l'équation d'une courbe sphérique quelconque, si on imagine un cône ayant pour base cette courbe, et pour sommet le centre de la sphère, ce cône coupera le cylindre droit ayant pour base l'équateur suivant une autre courbe ; on demande son équation après qu'on a développé le cylindre.*

Soient $m$ un point de la courbe, $x$ sa longitude, $AD = y$ sa distance polaire, nous aurons CD ou l'ordonnée du point $m$ après le développement du cylindre

$$(A) \qquad Y = \cot y\,;$$

$x$ reste le même. Si donc entre l'équation de la courbe et l'équation (A) on élimine $y$, on aura l'équation demandée. Appliquant à la loxodromie, on trouve

$$Y = \frac{a^{-x} - a^{x}}{2} \quad \text{ou} \quad Y = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}.$$

Si on applique à la développée, on trouve

$$Y = C\left(\frac{a^{x} + a^{-x}}{2}\right).$$

C'est l'équation d'une chaînette dont les ordonnées sont multipliées par un même facteur (*).

*Rectification de la développée de la loxodromie.*

On démontrera comme sur un plan, par des considérations d'infiniment petits, que si on passe d'un point A d'une courbe au point infiniment voisin, la différence des rayons de courbure en ces deux points est égale à l'arc correspondant de la développée. Or nous avons trouvé pour le rayon de courbure de la loxodromie la formule

$$\operatorname{tang} R = \frac{\operatorname{tang} y}{\sin\varphi},$$

ce qui donne entre $dR$ et $dy$ l'équation

$$\frac{dR}{\cos^2 R} = \frac{dy}{\cos^2 y \sin\varphi} \quad \text{ou} \quad dR = \frac{dy \cos^2 R}{\cos^2 y \sin\varphi};$$

éliminant $\cos^2 R$, il vient

$$(1) \qquad dR = \frac{dy \sin\varphi}{\cos^2 y\,(\sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2 y)}.$$

(*) GUDERMANN, *Relations remarquables entre la ligne loxodromique et la caténaire sphérique* (*Crelle*, t. XI, p. 394; 1830). Dans son ouvrage sur l'analyse sphérique (1830), il considère simultanément la cycloïde et la caténaire sphériques (p. 42) et aussi les coordonnées trilitères (p. 153).

Mais en appelant $y_1$ la distance polaire du point de la développée correspondant à celui que nous considérons sur la loxodromie, on a trouvé

$$(2) \qquad \sin y = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} y_1,$$

d'où

$$dy \cos y = \frac{\operatorname{tang}\varphi \, dy_1}{\cos^2 y_1}$$

Remplaçant dans l'équation (1) $dy$ par cette valeur, on a

$$dR = \frac{dy' \sin\varphi \operatorname{tang}\varphi}{\cos^2 y' \cos y \,(\sin^2\varphi \cos^2 y + \sin^2 y)}.$$

Éliminant $y$ au moyen de l'équation (2), on trouve enfin

$$dR = \frac{dy \cos y'}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2 y_1}}.$$

Si on appelle S l'arc de la développée commençant quand la loxodromie coupe l'équateur, on aura

$$dS = -dR;$$

nous mettons *moins*, parce que R diminue quand S augmente. On aura donc

$$\frac{dS}{dy} = -\frac{\left(\frac{\cos y'}{\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin y'}{\cos\varphi}\right)^2}},$$

d'où, remontant de ces dérivées égales aux fonctions primitives,

$$S = \operatorname{arc} \cos \frac{\sin y'}{\cos\varphi},$$

ou, prenant les cosinus de part et d'autre,

$$\cos S = \frac{\sin y'}{\cos \varphi}.$$

Enfin si on nomme $\lambda$ la latitude du point, on aura

$$\cos S = \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi}.$$

Soit A le point de la développée à partir duquel je mesure l'arc S, AB sera égal à $\varphi$. Soient C un autre point de la courbe, CI sa latitude; si de A comme pôle avec CI pour distance polaire on décrit un cercle coupant l'équateur en D, BD représentera l'arc de la développée de A à C. Si $\lambda = \frac{\pi}{2}$, on trouve $S = \frac{\pi}{2}$, c'est la longueur totale de la développée du point A jusqu'au point asymptote. Le même calcul donne pour la longueur totale de la loxodromie $\frac{\pi}{2\cos\varphi}$, quantité d'autant plus grande que $\varphi$ est plus grand, tandis que pour la développée sa longueur totale reste la même, quel que soit $\varphi$.

*Rayon de courbure de la développée.*

Nous emploierons la formule déjà obtenue

$$\tang R = \frac{(p^2 + \cos^2 y)^{\frac{3}{2}}}{\sin y\,(2p^2 + \cos^2 y) + q\cos y}$$

ou plus simplement

$$\tang R = \frac{S_1^3}{\sin y\,(p^2 + S_1^2) + q\cos y}.$$

Or, on a trouvé dans le problème précédent

$$dS = -\frac{dy\sin y}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y}},$$

$y$ désignant la latitude, d'où

$$S' = -\frac{p \sin y}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y}}:$$

l'équation de la développée par un déplacement de l'origine donne

$$\operatorname{tang} y = \frac{a^x + a^{-x}}{2m}, \qquad a = e^{-m};$$

d'où

$$p \text{ ou } \frac{dy}{dx} = -\frac{a^x - a^{-x}}{2}\cos^2 y;$$

or

$$(a^x - a^{-x})^2 = (a^x + a^{-x})^2 - 4 = 4(m^2 \operatorname{tang}^2 y - 1)$$
$$= 4m^2(\operatorname{tang}^2 y - \operatorname{tang}^2\varphi) = \frac{4(\cos^2\varphi - \cos^2 y)}{\cos^2 y \sin^2\varphi},$$

d'où

$$a^x - a^{-x} = -\frac{2\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y}}{\cos y \sin\varphi}.$$

Nous choisissons *moins* parce que $a^x$ est $< a^{-x}$, $a$ étant moindre que l'unité. Remplaçant $a^x - a^{-x}$ par son expression dans $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$p = \frac{\cos y \sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y}}{\sin\varphi},$$

d'où

$$q \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\sin y(\cos^2\varphi - 2\cos^2 y)}{\sin\varphi\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y)}}p;$$

portant ces valeurs de S' et de $q$ dans tang R, on obtient, toutes réductions faites,

$$\operatorname{tang} R = \frac{\sin^2 y \cos y}{\sin q}.$$

Si on prend la dérivée du numérateur, on trouve

$$\sin y\,(2 - 3\sin^2 y),$$

quantité positive tant qu'on a

$$\sin y < \sqrt{\frac{2}{3}},$$

et alors le rayon de courbure augmente; il atteint son maximum quand

$$\sin y = \sqrt{\frac{2}{3}}:$$

au delà, il va en décroissant jusqu'à o.

Pour trouver l'angle d'une courbe avec le méridien du point de contact, on a trouvé

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\cos y}{p} \quad \text{ou} \quad \sin\varphi' = \frac{\cos y}{\sqrt{p^2 + \cos^2 y}}.$$

Remplaçant $p$ par sa valeur, on aura pour la courbe qui nous occupe

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\varphi}{\sin y}.$$

La longueur de la normale N, depuis la courbe jusqu'à l'équateur, se déduit d'un triangle rectangle, et on trouve

$$\operatorname{tang} N = \frac{\operatorname{tang} y}{\sin\varphi_1} = \frac{\operatorname{tang} y \sin y}{\sin\varphi}.$$

Si on multiplie ce résultat par tang R, on trouve

$$\operatorname{tang} N \operatorname{tang} R = \frac{\sin^4 y}{\sin^2\varphi}$$

ou

$$\operatorname{tang} N . \operatorname{tang} R = \left(\frac{\sin^2 y}{\sin\varphi}\right)^2.$$

(Ces formules sur la développée de la loxodromie se trouvent sans démonstration dans le numéro des *Annales* déjà cité. Elles sont extraites d'un ouvrage de M. d'Arrest.)

*Perspective de la loxodromie sur le plan de l'équation, l'œil étant placé au pôle opposé* (Halley).

Résolvons d'abord la question pour une courbe quelconque tracée sur la sphère. Soit

$$\varphi(x, \mathrm{Y}) = 0$$

l'équation de cette courbe, Y étant la distance polaire d'un de ses points C, dont $c$ est la perspective sur l'équateur, on a

$$\mathrm{OC} \quad \text{ou} \quad \rho = \operatorname{tang} \frac{\mathrm{PC}}{2} = \operatorname{tang} \frac{\mathrm{Y}}{2} \quad \text{et} \quad \omega = x\cdot$$

si entre ces deux équations et celle de la courbe on élimine $x$ et Y, on aura l'équation de la perspective en coordonnées polaires. Si on applique à notre courbe dont l'équation est

$$\operatorname{tang} \frac{\mathrm{Y}}{2} = a^x,$$

on aura

$$\rho = a^\omega.$$

La perspective demandée est donc une spirale logarithmique dont le centre O est le point asymptote.

*Note du Rédacteur.* M. Grunert a publié en 1849 une *Loxodromische trigonometrie,* dont mon fils, professeur d'hydrographie à Dunkerque, a donné une traduction française en 1859. Le cas général est traité dans le Mémoire : Boymann, *De lineis loxodromicis in datis* *superficiebus*. In-4; Berlin, 1839. Et du même : Équation des lignes loxodromiques sur les surfaces du second ordre (*Archiv. de Grunert*, t. VII, 1846); Équation de la ligne loxodromique sur une surface engendrée par la révolution d'une parabole autour de la tangente au sommet (*Ibid.*, t. XIII, 1849). Boymann (Johann-Robert), professeur au gymnase de Coblentz, né à Neuss, près Dusseldorf, le 17 janvier 1815.