P. FARJON

G. LAURENT

Solution de la question 510

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 51-53

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__51_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 510

(voir t XIX, p. 46);

PAR MM. P. FARJON ET G. LAURENT,
Élèves du lycée de Lille (classe de M. David).

Par les trois extrémités des axes principaux d'un ellipsoïde on mène trois cordes parallèles; on projette chacune de ces cordes sur l'axe d'où elle part; on divise cette projection par l'axe sur lequel elle se trouve, la somme des trois quotients est constante.

Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

et les trois cordes données :

$$(1)\qquad \begin{cases} x-a=\delta z, \\ y=\delta' z; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x=\delta z, \\ y-b=\delta' z; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\delta (z-c), \\ y=\delta' (z-c). \end{cases}$$

Le plan diamétral conjugué de ces cordes a pour équation

$$\frac{x}{a^2}+\frac{\delta y}{b^2}+\frac{\delta' z}{c^2}=0.$$

L'abscisse de son intersection avec la corde (1) est

$$x'=\frac{a\,(a^2c^2\delta\delta'+a^2b^2\delta')}{b^2c^2\delta+a^2c^2\delta\delta'+a^2b^2\delta'}.$$

L'ordonnée de l'intersection du même plan avec la corde (2) est

$$y''=\frac{b\,(b^2c^2\delta'+a^2b^2\delta')}{b^2c^2\delta+a^2c^2\delta\delta'+a^2b^2\delta'}.$$

Enfin le z de son intersection avec la corde (3) est

$$z'''=\frac{c\,(b^2c^2\delta+a^2c^2\delta\delta')}{b^2c^2\delta+a^2c^2\delta\delta'+a^2b^2\delta'}.$$

On tire de là

$$\frac{x'}{a}+\frac{y''}{b}+\frac{z'''}{c}=2,$$

relation qui n'est autre que celle qu'il faut démontrer, car elle peut s'écrire :

$$\frac{a-x'}{a}+\frac{b-y''}{b}+\frac{c-z'''}{c}=1,$$

et $a-x'$, $b-y''$, $c-z'''$ sont précisément les moitiés des projections des cordes (1), (2), (3).

Remarque (*). Par la nature même de la démonstration, on voit qu'en prenant des projections obliques, le théorème peut s'étendre à trois cordes parallèles menées par les extrémités de trois diamètres conjugués quelconques.

(*) Cette remarque n'appartient qu'à ces deux élèves. TM.

- *Note.* MM. Cuenoud de Lausanne, Vannier de Bourg-la-Reine, L. Blanche-Arnault, élève du lycée Louis-le-Grand, Ch. Kessler, élève du Prytanée militaire, Oscar Derome, élève du lycée de Lille, donnent à peu près la même solution.