Nouvelles annales de mathématiques

Mention

Sur la question 478 et son extension au tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 88-90

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__88_1>

SUR LA QUESTION 478 ET SON EXTENSION AU TÉTRAÈDRE

(voir t. XIX, p. 283);

PAR M. MENTION.

En m'occupant des relations qui existent entre les rayons des huit cercles tangents à trois autres, et ceux des seize sphères qui touchent quatre sphères données, j'ai indiqué les relations suivantes concernant le triangle et le tétraèdre :

$$\text{(A)} \quad \sum (\text{AM}^4 . a^2) - 2 \sum \left(\overline{\text{AM}}^2 . \overline{\text{BM}}^2 ab \cos \widehat{a, b}\right) = 16\text{T}^2 . \overline{\text{MO}}^2,$$

M étant un point quelconque du plan d'un triangle ABC, a, b, c ses côtés, T sa surface et O le centre de son cercle circonscrit.

$$\text{(B)} \quad \sum (\text{AM}^4 . \text{A}^2) - 2 \sum \left(\overline{\text{AM}}^2 . \overline{\text{BM}}^2 . \text{AB} \cos \widehat{\text{A}, \text{B}}\right) = 36\text{V} . \overline{\text{MO}}^2,$$

M étant un point quelconque de l'espace, A, B, C, D les

(*) M. Pigeon (Henri), élève du lycée de Strasbourg, a envoyé une seconde solution des questions 478 et 523.

quatre faces du tétraèdre ABCD, V son volume et O le centre de sa sphère circonscrite.

Ce ne sont que les relations de Goldbach et de Carnot transformées.

Le théorème de M. Salmon, démontré page 283 du tome XIX de ce recueil, se déduit facilement de ces relations : on peut même l'étendre au tétraèdre.

Lemme. Étant donnés un cercle de centre O et une droite qui lui est extérieure ou tangente, il est toujours possible de déterminer deux points M, M′ (se confondant avec le point de contact, quand la droite touche le cercle), tels que

$$\overline{MA}^2 = 2\,AP.MO.$$

A un point quelconque de la circonférence, AP sa distance à la droite.

Ce lemme subsiste pour une sphère et un plan.

Alors α, β, γ, δ désignant les distances des sommets d'un triangle à une droite qui ne coupe point le cercle circonscrit, on aura :

$$\overline{AM}^2 = 2\alpha.MO,$$

$$\overline{BM}^2 = 2\beta.MO,$$

$$\overline{CM}^2 = 2\gamma.MO;$$

d'où, par la substitution dans la formule (A),

$$\sum a^2\alpha^2 - 2\sum ab\cos\widehat{a,b}.\alpha\beta = 4T^2.$$

Ensuite α, β, γ, δ désignant les distances des sommets d'un tétraèdre à un plan qui ne coupe point la sphère circonscrite, on aura

$$\overline{AM}^2 = 2\alpha . MO,$$

$$\overline{BM}^2 = 2\beta . MO,$$

$$\overline{CM}^2 = 2\gamma . MO,$$

$$\overline{DM}^2 = 2\delta . MO;$$

d'où, par la substitution dans la formule (B),

$$\sum A^2\alpha^2 - 2\sum AB\cos\widehat{A,B}\,\alpha\beta = 9V^2.$$

On pourrait introduire les arêtes dans cette relation, car

$$16\,AB.\cos\widehat{A,B}$$

$$= c'^2(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2) + b^2 b'^2 + a^2 a'^2 - c^2 c'^2 - a'^2 b'^2 - a^2 b^2,$$

a, a', b, b', c, c' couples d'arêtes opposées, a', b', c' partant du sommet B, a', b, c du sommet A, a, c, b' du sommet B, etc.

Il sera facile de conclure du cas précédent le cas où la droite et le plan coupent le cercle et la sphère, en prenant une droite et un plan parallèles et ne les coupant pas.

Note. Le théorème (p. 63) attribué à M. Roberts est de M. J. Harcourt (t. XIX, p. 439).