Remarques sur la transformation et l'abaissement des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 122-127
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__122_1>

REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION ET L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS.

1. Soit

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

une équation algébrique du $m^{ième}$ degré. Posons

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x),$$

$\varphi_0(x)$ désignant la somme de tous les termes de degré pair, et $\varphi_1(x)$ la somme de tous les termes de degré impair. On aura

$$(2) \qquad \varphi_0(-x) = \varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \varphi_1(-x) = -\varphi_1(x).$$

Supposons que l'équation (1) admette deux racines égales et de signes contraires $+a$ et $-a$, et, ce qui revient au même, que son premier membre soit divisible par $x^2 - a^2$. On aura identiquement

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_0(a) + \varphi_1(a) = 0, \\ \varphi_0(-a) + \varphi_1(-a) = 0, \end{cases}$$

ou, à cause des équations (2),

$$(4) \qquad \varphi_0(a) - \varphi_1(a) = 0.$$

On tire des identités (2) et (3)

$$\varphi_0(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(a) = 0;$$

d'où l'on conclut que les équations

$$(5) \qquad \varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = 0$$

ont une racine commune. Par conséquent, *pour qu'une équation admette deux racines égales et de signes contraires, il faut et il suffit qu'il existe une racine commune aux deux équations que l'on obtient en égalant à* 0 *d'abord l'ensemble des termes de degré pair, puis l'ensemble des termes de degré impair.*

La recherche des racines communes aux équations (4) est susceptible de simplification. Il faudra d'abord diviser $\varphi_1(x)$ par x, et comme les polynômes $\varphi_0(x)$ et $\frac{\varphi_1(x)}{x}$ n'ont que des termes de degré pair, en posant $x^2 = z$ on diminuera de moitié leur degré.

2. Posons

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x);$$

la lettre φ, affectée de l'indice 0, 1 ou 2 servant à désigner actuellement l'ensemble de tous les termes dans lesquels l'exposant de x, divisé par 3, donne le même reste 0, 1 ou 2. Si α et α^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité, on aura évidemment

$$(6)\left\{\begin{array}{lll}\varphi_0(\alpha x)=\varphi_0(x), & \varphi_1(\alpha x)=\alpha\varphi_1(x), & \varphi_2(\alpha x)=\alpha^2\varphi_2(x),\\ \varphi_0(\alpha^2x)=\varphi_0(x), & \varphi_1(\alpha^2x)=\alpha^2\varphi_1(x), & \varphi_2(\alpha^2x)=\alpha\varphi_2(x).\end{array}\right.$$

Supposons maintenant que le premier membre de l'équation (1) soit divisible par x^3-a^3. On aura, en ayant égard aux équations (6),

$$\begin{array}{l}\varphi_0(a)+\varphi_1(a)+\varphi_2(a)=0,\\ \varphi_0(a)+\alpha\varphi_1(a)+\alpha^2\varphi_2(a)=0,\\ \varphi_0(a)+\alpha^2\varphi_1(a)+\alpha\varphi_2(a)=0,\end{array}$$

d'où l'on conclut

$$\varphi_0(a)=0,\quad \varphi_1(a)=0,\quad \varphi_2(a)=0,$$

en sorte que les équations

$$(7)\qquad \varphi_0(x)=0,\quad \varphi_1(x)=0,\quad \varphi_2(x)=0$$

auront une racine commune a (et même trois, puisque αa et $\alpha^2 a$ y satisfont également).

D'ailleurs, tous les termes de la seconde sont divisibles par x, et tous ceux de la troisième par x^2. Lorsque ces facteurs communs auront été enlevés, les équations (7) s'abaisseront à un degré trois fois moindre en faisant $x^3=z$.

Ces propriétés, et d'autres analogues, ont été données par Lambert dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1763. Elles ont de nombreuses conséquences qui ne paraissent pas avoir été suffisamment remarquées.

3. Supposons que deux racines de a et b de l'équation (1) aient une somme connue $2s$. L'équation $f(x+s)=0$ aura deux racines égales et de signes contraires qu'on trouvera par la règle du n° 1, et l'on aura à effectuer une élimination bien moins laborieuse qu'en suivant la méthode indiquée dans la plupart des Traités d'Algèbre.

4. Quand l'équation $f(x) = 0$ est de degré pair, et que toutes ses racines se partagent en couples donnant une somme $2s$, l'équation $f(x+s) = 0$ a ses racines égales deux à deux et de signes contraires. Par suite, pour savoir si une équation jouit de cette propriété (et en particulier si elle a ses racines en progression arithmétique), il faudra faire disparaître le second terme. Alors tous les termes de rang pair devront disparaître.

Si l'équation $f(x)$, de degré impair, a une racine égale à s, et toutes les autres donnant deux à deux la somme $2s$, l'équation $f(x+s) = 0$ aura, dans ce cas, une racine nulle, et toutes les autres seront deux à deux égales et de signes contraires. L'équation $f(x+s) = 0$ n'aura donc que des termes de degré impair.

5. Si l'équation $f(x) = 0$, de degré pair ou impair, est telle que ses racines groupées deux à deux donnent la même somme $2s$ (avec une racine unique égale à s, dans le cas où le degré est impair), l'équation $f(x+s) = 0$ n'aura que des termes de même parité; il en sera de même des équations $f'(x+s) = 0$, $f''(x+s) = 0, \ldots$ qui auront alternativement ou toutes leurs racines égales deux à deux et de signes contraires, ou bien une racine nulle et toutes leurs autres racines égales et de signes contraires.

De là résulte ce théorème :

Si les racines de l'équation de degré pair

$$f(x) = 0$$

peuvent se partager en couples donnant une somme $2s$, *les racines des équations*

$$f''(x) = 0, \quad f^{\text{IV}}(x) = 0, \quad f^{\text{VI}}(x) = 0, \text{ etc.}$$

jouiront de la même propriété, et il en sera de même (la racine s mise à part) pour les racines des équations

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{\text{V}}(x) = 0, \ldots$$

Ce théorème et un autre, analogue pour les équations de degré impair, ont été proposés par nous comme exercice dans les *Nouvelles Annales* (question 392, t. XVI, p. 311) et démontrés t. XVII, p. 157.

6. Proposons-nous de trouver l'équation dont les racines sont les moyennes arithmétiques des racines d'une équation proposée, prises deux à deux.

Si $2s$ représente la somme de deux racines de l'équation $f(x)=0$, l'équation $f(x+s)=0$ aura deux racines égales et de signes contraires. Il suffira donc d'exprimer que l'ensemble des termes de degré pair de $f(x+s)$ et l'ensemble des termes de degré impair s'annulent pour la même valeur de x: l'opération reviendra à éliminer x^2 entre les équations obtenues quand on égalera à zéro la première somme, et la seconde divisée par x.

Exemples. — 1° Soit

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4=0$$

l'équation proposée : posons

$$f(x+s)=S_0+S_1x+S_2x^2+S_3x^3+S_4x^4=0,$$

S_0, S_1, S_2, etc., désignant $f(s)$, $f'(s)$, $\frac{f''(s)}{1.2}$, etc. ; il faudra éliminer x^2 entre les équations

$$S_0+S_2x^2+S_4x^4=0,$$
$$S_1+S_3x^2=0,$$

ce qui donne

$$S_0-\frac{S_1S_2}{S_3}+\frac{S_1^2S_4}{S_3^2}=0,$$

ou

$$S_0S_3^2-S_1S_2S_3+S_1^2S_4=0.$$

Pour le cinquième degré, on trouvera

$$(S_0S_3 - S_1S_2)(S_2S_5 - S_3S_4) - (S_0S_5 - S_1S_4)^2 = 0,$$

et, pour le sixième degré,

$$[(S_1S_4 - S_0S_5)S_1 - (S_1S_2 - S_0S_3)][(S_1S_0 - S_0S_5)S_5 - S_1S_3S_6] + [(S_1S_2 - S_0S_3)S_5 - S_1^2S_0]^2 = 0.$$

7. Ce qui précède conduit au théorème que j'ai donné sans démonstration dans les *Nouvelles Annales* (t. XVIII, p. 257), et dont je rétablis ici l'énoncé légèrement modifié :

Soit $f(x) = 0$ *une équation algébrique ; soient* $\varphi_0(x)$ *l'ensemble des termes de degré pair, et* $\varphi_1(x)$ *l'ensemble des termes de degré impair du développement de* $f(x+s)$. Soit $\psi(s)$ *le reste indépendant de* x^2, *mais fonction de s, qu'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur entre* $\varphi_0(x)$ *et* $\frac{\varphi_1(x)}{x}$. *L'équation* $f(x) = 0$ *aura autant de diviseurs commensurables du second degré qu'il y aura de valeurs commensurables de s satisfaisant à l'équation* $\psi(s) = 0$.

(*Sera continué.*) P.