NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 21-38

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__21_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 563, 564 *et* 565 (Faure)

(voir t. XX, p. 56);

Par M. CREMONA.

1. On donne un faisceau de courbes de l'ordre n, ayant n^2 points communs. Quel est le lieu des foyers (*) de ces courbes? Pour connaître l'ordre de ce lieu, il suffit de découvrir le nombre de foyers qui tombent sur une droite quelconque, par exemple sur la droite à l'infini.

Parmi les courbes du faisceau, il y en a $2(n-1)$ du

(*) On appelle *foyers* d'une courbe les intersections des tangentes menées à la courbe par les deux points circulaires à l'infini.

genre parabolique, c'est-à-dire qui sont tangentes à la droite à l'infini. Ces courbes seules peuvent avoir des foyers à l'infini.

Soient ω, ω' les points circulaires à l'infini. Si par chacun de ces points on mène les $n(n-1)$ tangentes à une courbe du faisceau, les $n^2(n-1)^2$ intersections de ces tangentes sont les foyers de la courbe. Lorsque celle-ci est parabolique, il n'y a que $n(n-1)-1$ tangentes (autres que la droite à l'infini) issues de ω ou de ω'; donc $[n(n-1)-1]^2$ foyers seulement seront à distance finie; les autres $2n(n-1)-1$ tombent à l'infini. Cela doit être répété pour chacune des $2(n-1)$ courbes paraboliques; donc la droite à l'infini contient

$$2(n-1)[2n(n-1)-1]$$

foyers, et par conséquent ce nombre est l'ordre du lieu cherché.

De ces foyers à l'infini, $2(n-1)$ sont les points de contact des courbes paraboliques avec la droite $\omega\omega'$; les autres $4(n-1)[n(n-1)-1]$ coïncident évidemment avec ω, ω'; donc, chacun des points circulaires est multiple, suivant le nombre $2(n-1)[n(n-1)-1]$.

Parmi les courbes du faisceau, il y en a $3(n-1)^2$ qui ont un point double; ces $3(n-1)^2$ points sont des points doubles aussi pour la courbe des foyers.

En résumé : Le lieu des foyers de toutes les courbes de l'ordre n, ayant n^2 points communs, est une courbe de l'ordre

$$2(n-1)[2n(n-1)-1],$$

qui passe $2(n-1)[n(n-1)-1]$ fois par chacun des points circulaires à l'infini, et deux fois par chacun des $3(n-1)^2$ points doubles des courbes données.

Pour $n=2$ on a le théorème de M. Faure, qui constitue la question 565, savoir : *le lieu des foyers des co-*

niques qui passent par quatre points est une courbe du sixième ordre.

2. Soit donnée une série de courbes de la classe m, c'est-à-dire le système de toutes les courbes de cette classe qui ont m^2 tangentes communes. En suivant le même raisonnement, on trouve que le lieu des foyers est une courbe de l'ordre $2n-1$, ayant deux points imaginaires, multiples de l'ordre $n-1$, situés à l'infini sur un cercle, et un seul point réel à l'infini, déterminé par la courbe qui, seule dans le système donné, est parabolique.

3. Soient données quatre droites abc, $ab'c'$, $a'bc'$, $a'b'c$ formant un quadrilatère complet, dont a et a', b et b', c et c' sont les sommets opposés. Les diagonales aa', bb', cc' forment un triangle ABC (A intersection de bb' et de cc', etc.). Considérons les coniques inscrites dans le quadrilatère donné : parmi ces coniques, il y a une parabole et trois systèmes de deux points, c'est-à-dire (a, a'), (b, b'), et (c, c').

Toute conique du système considéré a quatre foyers : ce sont les quatre intersections des tangentes menées par les points circulaires ω, ω'. Pour la parabole, trois foyers tombent à l'infini en ω, ω' et au point i où la parabole est tangente à la droite $\omega\omega'$. Ce dernier point est sur la droite qui passe par les milieux des diagonales aa', bb', cc', parce que cette droite contient les centres de toutes les coniques du système. La parabole a un quatrième foyer o, qui n'est pas à l'infini : c'est l'intersection des tangentes $o\omega$, $o\omega'$ à la courbe, qui passent par les points circulaires.

Les deux triangles $o\omega\omega'$, bca' étant circonscrits à une même conique (la parabole du système), sont inscrits dans une seconde conique. Mais toute conique passant par ω, ω' est un cercle : donc o appartient au cercle qui passe par b, c, a'. De même pour les triangles cab', abc', $a'b'c'$; donc, le foyer o de la parabole est le point commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles formés par les droites données.

En vertu de ce qu'on a observé au n° 2, le lieu des foyers des coniques (courbes de la deuxième classe) tangentes aux quatre droites données est une courbe du troisième ordre passant par les points circulaires à l'infini, c'est-à-dire une *cubique circulaire,* selon l'expression de M. Salmon. Cette courbe a une seule asymptote réelle, qui est parallèle à la droite des centres. Les six sommets du quadrilatère appartiennent aussi à la cubique, parce que ces points sont des foyers pour les coniques (a, a'), (b, b'), (c, c').

Ainsi, sur chacune des diagonales aa', bb', cc' nous connaissons deux points de la cubique, lieu des foyers : cherchons la troisième intersection.

Si l est cette troisième intersection de la diagonale aa' par la cubique, les droites $l\omega$, $l\omega'$ seront tangentes à une même conique du système. Or, les couples des tangentes menées par l aux coniques du système forment une involution. La diagonale aa' est un rayon double de cette involution, parce qu'elle est la seule tangente qu'on puisse mener de l à la conique (a, a'). Le second rayon double est lA; en effet, A est le pôle de aa' par rapport à toute conique du système, donc lA est tangente en l à la conique du système qui passe par l.

Deux droites conjuguées de l'involution (les tangentes menées par l à une même conique du système) et les droites doubles doivent former un faisceau harmonique; par conséquent, l'angle des droites laa', lA doit être divisé harmoniquement par $l\omega$, $l\omega'$. Mais si, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués passent par les points circulaires à l'infini, on sait que les deux autres sont rectangulaires (*); donc, laa' et lA sont à angle droit, c'est-à-dire, les troisièmes intersections de la cubique par les diagonales sont les pieds l, m, n des hauteurs du triangle ABC.

Remarquons que les neuf points a, a', b, b', c, c', l, m, n ne suffisent pas pour déterminer la cubique dont il s'agit. En effet, par ces points passent les trois aa', bb', cc' et, par conséquent, un nombre infini d'autres courbes du troisième ordre. Pour déterminer notre courbe, lieu des foyers, ajoutons qu'elle est circulaire, qu'elle a son asymptote réelle parallèle à la droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère, et qu'elle passe par le point o commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère.

Ainsi, les théorèmes de M. Faure (**) sont démontrés.

Question 491

(voir tome XVIII, page 443);

PAR M. CREMONA.

1. A est une courbe de l'ordre n, B une conique, dans un même plan. D'un point quelconque situé sur A on abaisse une perpendiculaire sur la polaire de ce point relativement à B. 1° Quelle est l'enveloppe de cette perpendiculaire? 2° Quel est le lieu du pied de la perpendiculaire?

(*) On peut définir ces droites qui vont aux points circulaires à l'infini comme les rayons doubles de l'involution engendrée par un angle droit qui tourne autour de son sommet fixe. (CHASLES, *Géométrie supérieure.*)

(**) 563. *La courbe du troisième ordre qui passe par les six sommets d'un quadrilatère complet et par les pieds des hauteurs du triangle formé par ses diagonales passe par les points circulaires à l'infini.*

564. *Cette courbe est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère et rappelle le cercle dans la théorie des courbes du troisième ordre.*

Deux droites perpendiculaires sont polaires conjuguées par rapport à la conique (enveloppe de deuxième classe) formée par les points circulaires ω, ω' à l'infini ; ainsi, le premier problème revient à celui-ci :

Soit m un point quelconque de A ; M *la droite polaire de m, relativement à la conique* B ; μ *le pôle de* M, *relativement à la conique* (ω, ω'), *c'est-à-dire le conjugué harmonique du point à l'infini sur* M, *par rapport à* (ω, ω') ; *quelle est l'enveloppe de la droite $m\mu$?*

Cherchons combien de droites analogues à $m\mu$ passent par un point arbitraire o. Si l'on mène par o une droite quelconque qui rencontrera A en n points $m, m', \ldots$, les polaires M, M',..., de ces points, par rapport à la conique B, auront leurs pôles μ, μ',..., relatifs à (ω, ω'), situés sur n droites $o\mu$, $o\mu'$,.... Si, au contraire, on mène arbitrairement une droite $o\mu$ (μ point à l'infini), soit ν le conjugué harmonique de μ, par rapport à (ω, ω'); du point ν on pourra mener n tangentes M, M',.... à la courbe A' polaire réciproque de A, par rapport à la conique B. Ces tangentes auront leurs pôles m, m',..., relatifs à B, situés sur n droites om, om',.... Ainsi, à une droite om correspondent n droites $o\mu$, et à une droite $o\mu$ correspondent n droites om. Donc, par un principe connu (dont M. de Jonquières a fait un heureux usage), il y aura $2n$ coïncidences de deux droites om, $o\mu$ correspondantes ; c'est-à-dire, l'enveloppe de $m\mu$ est une courbe K de la classe $2n$.

2. Si m est à l'infini (sur la courbe A), la droite $m\mu$ tombe entièrement à l'infini ; donc la droite à l'infini est une tangente de K multiple suivant n, c'est-à-dire K a $2n$ branches paraboliques. Ainsi, K n'a que n tangentes parallèles à une direction donnée, ou bien passant par un point μ donné à l'infini. Si ν est le conjugué harmonique de μ par rapport à ω, ω', et $m, m', \ldots$, les pôles, relatifs à B, des n tangentes de A' qui passent par ν, les droites $m\mu$, $m'\mu, \ldots$ seront les n tangentes de K qui aboutissent à μ. Si ν est un point (à l'infini) de A', deux tangentes de cette courbe coïncident et, par conséquent, deux tangentes $m\mu$ de K coïncideront aussi, c'est-à-dire μ sera un point de K. Il s'ensuit que la courbe K a $n(n-1)$ asymptotes respectivement perpendiculaires aux asymptotes de A'. En particulier, si ν tombe en ω, le point μ y tombe aussi ; donc, si A' a des branches (imaginaires) passant par ω, ω', la courbe K y passe autant de fois.

3. Les droites tangentes des courbes A' et K correspondent entre elles, une à une. En effet, si l'on donne M tangente de A', soient m, μ les pôles de M par rapport aux coniques B et (ω, ω') ; $m\mu$ sera la tangente de K qui correspond à M. Réciproquement, soit N une tangente de K, ν le pôle de N par rapport à (ω, ω') ; la droite polaire de ν par rapport à la conique B coupera N en un point m, et la droite polaire de m par rapport à la même conique B sera la tangente de A' qui correspond à N. Cela étant, le deuxième problème que je me suis proposé peut être énoncé comme suit :

Trouver le lieu du point commun à deux tangentes correspondantes des courbes A', K.

Menons une transversale arbitraire et cherchons combien de fois deux tangentes correspondantes de A', K se rencontrent sur cette transversale. D'un point quelconque p de la transversale on peut mener n tangentes à A' ; les n tangentes correspondantes de K rencontreront la transversale en n points q. Réciproquement, d'un point quelconque q de la transversale on peut mener $2n$ tangentes à K ; les $2n$ tangentes correspondantes de A' couperont la transversale en $2n$ points p. Ainsi, à un point p correspondent n points q, et à un point q correspondent $2n$ points p. Donc, il y aura sur la transversale $3n$ coïncidences de deux points p, q correspondants, c'est-à-dire, le lieu cherché est une courbe H de l'ordre $3n$.

Par chacun des points ω, ω' passent n tangentes de A' et les n tangentes correspondantes de K; donc, les points circulaires à l'infini sont des points multiples suivant n, pour la courbe H.

Nous avons vu que la droite à l'infini représente n tangentes de K; par conséquent, les points à l'infini sur les n tangentes correspondantes de A' appartiendront à H; c'est-à-dire, la courbe H a n asymptotes respectivement parallèles aux diamètres de la conique B, qui sont conjugués aux directions des asymptotes de A.

Il est évident que la courbe H passe par les $2n$ intersections de A et B.

4. Si l'on fait $n = 2$ (question 491), A et A' sont deux coniques (polaires réciproques par rapport à B); K est de la quatrième classe et H est du sixième ordre. Je vais considérer deux cas particuliers.

1° Soient A, B et, par conséquent, A' des paraboles semblables; a leur point commun à l'infini. La polaire de a, par rapport à B, est la droite à l'infini : donc, toute droite menée par a est une tangente de K, c'est-à-dire que cette enveloppe est composée du point a (enveloppe de première classe) et d'une courbe K' de troisième classe. D'un point quelconque ν à l'infini on peut mener une seule tangente à la parabole A' : donc il y a une seule tangente de K' qui aboutit à μ, conjugué harmonique de ν par rapport à (ω, ω'). Mais si ν tombe en a, cette tangente de A' tombe à l'infini ; par conséquent, au point a', conjugué harmonique de a par rapport à (ω, ω'), il n'y a qu'une tangente de K', la droite à l'infini. Cela signifie que a' est un point d'inflexion de K', et la droite à l'infini est la tangente relative, c'est-à-dire que K' a deux branches perpendiculaires (avec les convexités intérieures) aux diamètres des paraboles données; autrement K' est une *parabola cuspidata* (classification newtonienne).

Lorsque A est une conique quelconque, la droite à l'infini représente deux tangentes de K; dans le cas que nous considérons, les tangentes correspondantes de A' tombent elles-mêmes à l'infini : donc, tout point à l'infini compte deux fois comme point du lieu H; par conséquent ce lieu se décompose en deux droites qui coïncident à l'infini et en une courbe H' du quatrième ordre. On voit aisément que H' passe par les points circulaires et touche en a la droite à l'infini, c'est-à-dire que H' a deux branches paraboliques parallèles aux branches des paraboles données.

2° Soient A, B, et, par conséquent, A' des cercles concentriques, c'est-à-dire des coniques passant par ω, ω' et ayant en ces points les mêmes tangentes $o\omega$, $o\omega'$ (o centre commun des cercles). On conclut immédiatement de la théorie générale que, dans ce cas particulier, K se réduit à quatre points, dont deux coïncident en o; les deux autres sont ω, ω'; et H se décompose en quatre droites et un cercle; les quatre droites coïncident deux à deux avec $o\omega$ et $o\omega'$: le cercle est A'.

5. Pour $n = 1$, on a ce théorème connu :

On donne une droite A et un faisceau A' de droites : les points de A' correspondent anharmoniquement aux rayons de A'; d'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le rayon correspondant. L'enveloppe de cette perpendiculaire est une parabole; le lieu du pied de la perpendiculaire est une *cubique circulaire* dont l'asymptote réelle est parallèle au rayon de A' qui correspond au point à l'infini de A.

6. On démontre d'une manière analogue les théorèmes dans l'espace :

A est une courbe gauche de l'ordre n ; B une surface du second degré. D'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le plan polaire de ce point relativement à B; le lieu de cette perpendiculaire est une surface gauche du degré $2n$, qui a n génératrices à l'infini et un cône asymptote de l'ordre n, dont les génératrices sont respectivement perpendiculaires aux plans tangents du cône asymptote de la surface développable A', polaire réciproque de A par rapport à B.

Le lieu du pied de la perpendiculaire est une courbe gauche de l'ordre $3n$ qui a $2n$ points sur le cercle imaginaire à l'infini.

Si $n = 1$, on a ce théorème :

On donne une droite A dont les points correspondent anharmoniquement aux plans passant par une deuxième droite A'. D'un point quelconque de A on abaisse la perpendiculaire sur le plan correspondant; le lieu de la perpendiculaire est un paraboloïde qui a un plan directeur perpendiculaire à la droite A'; le lieu du pied de la perpendiculaire est une courbe gauche du troisième ordre (cubique gauche) qui passe par les points où le plan directeur nommé rencontre le cercle imaginaire à l'infini. On peut donner à cette espèce de *cubique gauche* le nom de *cercle gauche* ou *cubique gauche circulaire*.

Questions 677, 678 *et* 679 (Schröter)

(voir 2ᵉ série, t. II, p 522);

PAR M. CREMONA.

On trouve démontré analytiquement dans les Mémoires de MM. Hesse et Cayley, et géométriquement dans mon *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, que dans un réseau (*rete*) de coniques (*) il y en a certaines, en nombre infini, qui se réduisent à deux droites, et que ces droites enveloppent une courbe (générale) de troisième classe, que j'ai nommée *courbe cayleyenne* du réseau (**). Les trois tangentes qu'on peut mener à cette courbe par un point donné o sont les trois côtés du quadrangle complet inscrit aux coniques du réseau qui passent par o.

Un réseau est déterminé par trois coniques données et contient toutes les coniques des trois faisceaux auxquels les coniques données, considérées deux à deux, donnent lieu. Donc

Trois coniques quelconques ont généralement, deux à deux, six cordes communes; les dix-huit cordes qui en résultent touchent une même courbe de la troisième classe (question 679).

Si les trois coniques données (et par conséquent toutes celles du réseau) ont un point commun o, les neuf droites qui joignent o aux neuf points d'intersection des coniques (deux à deux) seront tangentes à la *cayleyenne*. Mais une courbe (propre) de la troisième classe ne peut admettre que trois tangentes au plus, issues d'un même point; donc, dans le cas actuel, la cayleyenne se décompose en une enveloppe de première classe (le point o)

(*) Un réseau de coniques est l'ensemble de toutes les coniques assujetties à trois conditions communes telles, que par deux points pris à volonté sur le plan il ne passe qu'une seule de ces coniques.

(**) M. Steiner a donné à cette courbe, dans le cas d'un réseau d'ordre quelconque, le nom de *courbe nodale* du réseau, dénomination adoptee par plusieurs géomètres. (*Voir* aussi, à ce sujet, la page 19 ci-dessus, ligne 24.)

et en une enveloppe de deuxième classe (une conique); donc

Si trois coniques ont un point commun, les neuf côtés des trois triangles qui sont formés par les autres points d'intersection des coniques, considérées deux à deux, touchent une même conique (question 678).

On déduit des mêmes considérations le théorème suivant, très-connu :

Si trois coniques ont une corde commune, les autres cordes communes aux coniques, considérées deux à deux, passent par un même point.

La question 677 est l'inverse de 678. Soient donnés trois triangles $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, circonscrits à une même conique K; les sommets de ces triangles, considérés deux à deux, déterminent trois coniques C_1, C_2, C_3, c'est-à-dire

$$C_1 \equiv (a_2 b_2 c_2 a_3 b_3 c_3), \quad C_2 \equiv (a_3 b_3 c_3 a_1 b_1 c_1), \quad C_3 \equiv (a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2).$$

La cayleyenne du réseau déterminé par les trois coniques C_1, C_2, C_3 aura, d'après la définition de cette courbe, neuf tangentes (les côtés des trois triangles) communes avec la conique K. Mais une courbe (propre) de troisième classe et une conique ne sauraient avoir que six tangentes communes au plus; donc la cayleyenne est formée par deux enveloppes partielles, la conique K et un point.

Soit o la quatrième intersection de C_2 et C_3 (outre $a_1 b_1 c_1$), et supposons qu'une conique C soit décrite par $o a_2 b_2 c_2 a_3$ et qu'elle rencontre C_2 en β_3, γ_3 (outre $o a_3$). En vertu d'un théorème démontré ci-devant (question 678), les côtés des triangles $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ seront tangents à une même conique, la conique donnée K. Mais K ne peut pas admettre quatre tangentes distinctes

a_3 (b_3, c_3, β_3, γ_3) issues d'un même point a_3; donc les triangles $a_3 b_3 c_3$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ doivent coïncider, c'est-à-dire la conique C se confondra avec C_1. Ainsi « les trois coniques C_1, C_2, C_3 ont un point commun o. »

Du théorème 679 on tire aisément les suivants :

Si l'on donne un faisceau de coniques conjointes C (*) *et une autre conique quelconque* K, *les cordes communes à* K *et à une conique* C *enveloppent une courbe de troisième classe tangente aux droites conjointes du faisceau et ayant un foyer au centre commun des coniques* C. *Et le lieu des points où se rencontrent deux à deux les cordes opposées est une courbe du troisième ordre qui passe par le centre et par les points à l'infini sur les axes principaux des coniques* C.

Si l'on donne un système de coniques confocales C *et une autre conique quelconque* K, *le lieu des sommets des quadrilatères complets circonscrits à* K *et à une conique* C, *est une courbe de troisième ordre qui passe par les foyers du système* C *et par les deux points circulaires à l'infini. Et les diagonales des quadrilatères nommés enveloppent une courbe de troisième classe tangente aux axes principaux des coniques* C *et à la droite à l'infini.*

Mêmes questions;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Ces théorèmes sont bien loin d'être nouveaux. M. Cayley démontre le corrélatif, par voie de dualité, du plus

(*) Coniques concentriques et décrites par quatre points (imaginaires) appartenant à un cercle de rayon nul (*Memoria sulle coniche e sulle superficie di second'ordine congiunte; Annali di Matematica*, t. III; Roma, 1861).

important d'entre eux, dans le tome X du *Journal de Liouville* (année 1845), p. 104. Ils font aussi tous partie du cours que M. Chasles professe depuis longtemps à la Sorbonne. Ils ont leur place naturelle dans la théorie des sections coniques, où ils se présentent comme la conséquence de propositions plus générales. M. Chasles se proposant de publier prochainement un traité complet de ces courbes, je ne reproduirai pas ici ses démonstrations, malgré l'intérêt qu'elles ne manqueraient pas d'offrir aux jeunes lecteurs des *Nouvelles Annales*. Mais en voici d'autres qui, si elles ne font pas ressortir le lien qui rattache ces théorèmes à la théorie générale des coniques, sont du moins très-simples et très-directes.

I. Théorème. — *L'enveloppe des cordes communes à une conique fixe* U *et à un faisceau* (C) *de coniques est une courbe de troisième classe.*

Il suffit de prouver que, par un point P, il ne passe que trois de ces cordes communes. Pour plus de simplicité, prenons ce point arbitrairement sur le périmètre de la conique U. Il est évident que les seules cordes communes qui aboutissent en P, sont les cordes communes à U et à la conique unique du faisceau qui passe en P. Ces cordes sont donc au nombre de trois, dont une est toujours réelle; ce qui démontre le théorème.

Le raisonnement fort simple qui précède est rigoureux. Il ne serait en défaut, que si le point P appartenait à la courbe enveloppe. Mais pour cela il faudrait qu'il fût le point de concours de deux cordes communes infiniment voisines; circonstance très-exceptionnelle, puisqu'elle suppose, 1° que, parmi les coniques du faisceau, il y en a une ou plusieurs qui aient, avec la conique U, un contact du second ordre, ce qui n'a pas lieu en général; et 2° qu'on ait choisi précisément le point de contact pour en faire le point P, qui, au contraire, est, par hypothèse, choisi d'une façon tout à fait arbitraire sur le périmètre de la conique U.

La courbe enveloppe est donc de la troisième classe, et il est évident qu'elle est touchée par les côtés et les diagonales du quadrilatère inscrit à toutes les coniques du faisceau (C). Car soient, par exemple, a et b deux côtés opposés de ce quadrilatère, le système des deux droites a, b représente une conique particulière du faisceau (C), dont les cordes communes avec U sont ces droites elles-mêmes.

II. — *Si la conique* U *passe par l'un a des sommets du quadrilatère inscrit aux coniques* (C), *la courbe enveloppe des cordes communes se décompose en deux parties, savoir : le point a lui-même et une conique.*

En effet, quel que soit le point P, la droite Pa rencontre la conique U en un second point a', par lequel on peut toujours faire passer une conique du faisceau (C), et une seule, dont la corde commune avec U est par conséquent Paa'. Le point P étant pris d'une manière quelconque dans le plan de la figure, il s'ensuit qu'il passe, par le point a, une infinité de cordes semblables ; en d'autres termes, le point a est un point isolé de la courbe enveloppe, qui se réduit ainsi à une courbe de seconde classe, c'est-à-dire à une conique, si l'on fait abstraction de ce point isolé.

III. — Le cas où l'on ne donne que trois coniques A, B, U rentre dans l'un des précédents ; car les deux coniques A, B, par exemple, peuvent être regardées comme faisant partie du faisceau (C) qu'elles déterminent. On a donc une démonstration très-simple des théorèmes proposés sous les n^{os} 679 et 678, et il est aisé de voir que celui du n^o 677 est une conséquence immédiate de ce dernier.

IV. — C'est également sur le théorème II que repose la solution du problème proposé sous le n° 317; d'où l'on voit que ce problème n'admet que deux solutions, ainsi que je l'avais annoncé.

Quant au théorème I, il est un cas particulier de cet autre, plus général, que j'ai donné, pour la première fois, dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques*, t. VI, 2e série, et dans le tome XX des *Nouvelles Annales*, savoir :

L'enveloppe des cordes communes à une courbe fixe du degré n, et à un faisceau de courbes du degré m, est une courbe de la classe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$.

J'ai fait voir au même endroit de combien d'unités cette classe s'abaisse, quand la courbe fixe passe par un ou plusieurs des points fondamentaux qui forment la base du faisceau.

Question 497 (*seconde solution*) ;

PAR M. N.,
Élève de Mathématiques spéciales.

Tout plan doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan coupe cette surface suivant deux coniques qui, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, ont un foyer commun au pied de cet axe.

(MOUTARD.)

On peut toujours trouver sur l'axe de révolution un point tel, que les tangentes menées de ce point à la courbe soient également inclinées sur cet axe. Je prends le point pour origine, pour plan des zx le plan de la courbe, et pour axe des z l'axe de rotation. (Les axes des coordonnées sont rectangulaires.)

Les équations de l'ellipse sont

$$a^2x^2 - b^2z^2 - (a'x + b'z + c')^2 = 0, \quad y = 0.$$

L'équation de la surface engendrée est

$$a^2(x^2+y^2) - b^2z^2 - \left(a'\sqrt{x^2+y^2} + b'z + c'\right)^2 = 0.$$

Le plan doublement tangent $ax - bz = 0$ est tout à fait quelconque, car je pourrais faire tourner les axes autour de l'axe des z.

L'équation de la projection de l'intersection de ce plan avec la surface sur le plan des xy sera

$$(1) \qquad a^2y^2 - \left(a'\sqrt{x^2+y^2} + \frac{ab'}{b}x + c'\right)^2 = 0,$$

équation que l'on peut décomposer dans les suivantes

$$a'\sqrt{x^2+y^2} + \frac{ab'}{b}x + c' - ay = 0,$$

$$a'\sqrt{x^2+y^2} + \frac{ab'}{b}x + c' + ay = 0,$$

ou

$$a'^2(x^2+y^2) = \left(a'y - \frac{ab'}{b}x - c'\right)^2,$$

$$a'(x^2+y^2) = \left(ay + \frac{ab'}{b}x + c'\right)^2;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Question 657;

PAR M. E. M.,
Professeur à Paris.

THÉORÈME. — *Si l'équation*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Dx^p + Fx^{p-1} + Fx^{p-2} + Gx^{p-3} + \ldots + U = 0$$

a toutes ses racines réelles, les coefficients D, E, F, G, *de quatre termes consécutifs vérifient l'inégalité*

$$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0.$$

(CATALAN.)

On trouve dans l'Algèbre de Bertrand l'énoncé suivant :

Si l'équation ci-dessus a ses racines réelles, $E^2 - DF$ et $F^2 - EG$ sont de même signe.

Les deux théorèmes se démontrent simultanément.

En effet, si l'on multiplie le premier membre de l'équation par $x - a$, on trouve

$$\ldots + \left.\begin{matrix} E \\ -Da \end{matrix}\right| x^p + \left.\begin{matrix} F \\ -Ea \end{matrix}\right| x^{p-1} + \left.\begin{matrix} G \\ -Fa \end{matrix}\right| x^{p-2} + \ldots$$

et l'on ne doit pas pouvoir disposer de a de telle sorte que les trois coefficients calculés soient en progression géométrique. Donc l'équation en a

$$(F - Ea)^2 = (E - Da)(G - Fa)$$

doit avoir ses racines imaginaires.

Or cette équation développée devient

$$(E^2 - DF)a^2 + (DG - EF)a + F^2 - EG = 0.$$

Donc :

1° Les coefficients extrêmes doivent être de même signe : c'est le théorème de Bertrand ;

2° On doit avoir

$$(DG - EF)^2 - 4(E^2 - DF)(F^2 - EG) < 0 :$$

c'est celui de Catalan.

Les corollaires indiqués pour ce dernier sont évidents.

Note. — C'est par inadvertance que nous avons inséré le théorème donné par M. E. M. comme une généralisation de la question 671 (*voir* 2e série, t. II, p. 543). Ce théorème n'est vrai que si le point A est un ombilic.