Nouvelles annales de mathématiques

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 112-128

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__112_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 709

(voir 2ᵉ série, t. III, p. 442);

PAR M. RECOQ,
Élève du lycée de Montpellier (classe de M. Berger).

Trouver le lieu géométrique d'un point tel, que la somme des carrés des trois normales menées de ce point à une parabole donnée soit égale à un carré donné k^2.

Soient (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des pieds des trois normales, menées à la parabole par un point quelconque (α, β) du lieu; nous supposons la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. L'équation aux abscisses des pieds de ces normales étant

$$x^3 + 2(p - \alpha)x^2 + \ldots = 0,$$

on a

$$(1) \qquad x + x_1 + x_2 = -2(p - \alpha),$$

et l'équation aux ordonnées manquant du second terme, on a

$$(2) \qquad y + y_1 + y_2 = 0.$$

Si, en tenant compte de ces deux relations, on fait la somme des expressions

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \delta^2,$$
$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \delta_1^2,$$
$$(x_2 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2 = \delta_2^2,$$

où δ, δ_1, δ_2 désignent les trois normales issues du point (α, β), il vient

(3) $k^2 = x^2 + x_1^2 + x_2^2 + y^2 + y_1^2 + y_2^2 + 4\alpha(p-\alpha) + 3\alpha^2 + 3\beta^2$.

Mais on sait que les pieds des trois normales se trouvent sur le cercle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 - (p+\alpha)x - \frac{\beta}{2}y = 0;$$

on a donc

$$x^2 + y^2 - (p+\alpha)x - \frac{\beta}{2}y = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 - (p+\alpha)x_1 - \frac{\beta}{2}y_1 = 0,$$

$$x_2^2 + y_2^2 - (p+\alpha)x_2 - \frac{\beta}{2}y_2 = 0,$$

ou en ajoutant, et ayant égard aux relations (1) et (2),

(4) $x^2 + x_1^2 + x_2^2 + y^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(p+\alpha)(p-\alpha) = 0$.

Les équations (3) et (4) ajoutées membre à membre donnent, en remplaçant α et β par x et y, l'équation du lieu

$$(5) \qquad 3\left(x^2 + y^2 - \frac{k^2}{3}\right) = 2(x-p)^2.$$

Cette équation représente une ellipse ayant son grand axe sur l'axe des x; son centre est situé à gauche de l'axe des y à une distance $2p$; toutes les ellipses obtenues en faisant varier k ont donc un centre commun, en outre elles sont toutes semblables. Leur demi-grand axe est $\sqrt{6p^2 + k^2}$; quand on donne à k des valeurs croissantes, cet axe augmente indéfiniment et par suite aussi la courbe qui est toujours semblable à elle-même. On peut déterminer k de manière que l'ellipse soit aussi grande que l'on voudra; mais parmi ces ellipses correspondant à une valeur *réelle* de k, il y en a une qui est minimum, c'est celle qui répond à la valeur $k = 0$

$$3(x^2 + y^2) = 2(x - p)^2,$$

laquelle a évidemment pour foyer le sommet de la parabole, et pour directrice la droite $x = p$.

L'ellipse coupe généralement la développée :

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3;$$

les points qui occupent la portion intérieure fournissent trois normales réelles, tandis que les autres n'en donnent qu'une. Soit A le sommet de la développée qui est sur l'axe des x à une distance $x = p$ de l'origine, B le point situé à droite de l'origine où l'ellipse coupe l'axe des x, la valeur de k pour laquelle OB = OA = p est une limite en deçà de laquelle on ne peut plus mener trois normales réelles; cette limite est $k = p\sqrt{3}$.

La forme de l'équation (5) montre que la courbe est doublement tangente au cercle

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2}{3} = 0,$$

aux points où elle est coupée par l'ordonnée du point A. Le rayon du cercle est indépendant de p : donc, quand on fait varier le paramètre de la parabole, l'ellipse enveloppe le cercle

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2}{3} = 0 \ (*).$$

Puisque les points de contact sont sur l'ordonnée du point A, ils seront réels ou imaginaires selon qu'on aura $k \gtrless p\sqrt{3}$; pour $k = p\sqrt{3}$, ils se réuniront au point A.

(*) Cette remarque a été faite également par M. Audoynaud.

Autre solution. — La méthode précédente repose sur un artifice, mais on peut en donner une plus générale et plus directe qui s'applique à toutes les coniques.

Le problème serait résolu si l'on connaissait l'équation qui admet pour racines les carrés des trois normales menées du point (α, β) à la courbe.

Exprimons pour cela que le cercle

$$(6) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \delta^2 = 0,$$

qui a pour centre le point (α, β), est tangent à la conique

$$Ay^2 + Bx^2 - 1 = 0;$$

alors δ représentera une normale.

Cette condition peut se trouver en exprimant que l'équation en λ relative à l'intersection des deux courbes a une racine double. On obtiendra l'équation cherchée, en se servant de la relation connue qui lie les coefficients d'une équation du troisième degré ayant deux racines égales.

L'équation en λ relative à leur intersection est

$$\begin{gathered}\lambda^3 AB + \lambda^2[A + B - AB(\alpha^2 + \beta^2) + AB\delta^2] \\ + \lambda[A\alpha^2 + B\beta^2 + 1 - (A+B)(\alpha^2+\beta^2) + (A+B)\delta^2] + \delta^2 = 0;\end{gathered}$$

on en déduit l'équation au carré des normales

$$\begin{aligned}AB(A-B)^2\delta^8 - 2\delta^6[AB(A^2-3AB+2B^2)\alpha^2 + AB(B^2-3AB+A^2) \\ + (A+B)(A-B)^2] + \ldots = 0.\end{aligned}$$

On a donc pour le lieu du point (α, β)

$$\begin{gathered}2AB[(A^2 - 3AB + 2B^2)x^2 + (B^2 - 3AB + 2A^2)y^2] \\ = (A-B)^2[k^2 AB - 2(A+B)].\end{gathered}$$

Ce lieu est une conique.

Examinons en particulier le cas de l'hyperbole équilatère. L'équation se réduit au cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{3}.$$

Ce résultat est indépendant de la grandeur de l'hyperbole. Toutes les hyperboles équilatères concentriques, dont les axes ont la même direction, donnent lieu au même cercle, et l'on a ce théorème :

Étant donné un point P *fixe dans le plan d'une hyperbole équilatère qui varie en conservant son centre et la direction de ses axes, la somme des carrés des quatre normales menées de ce point à cette hyperbole reste égale à une constante* k^2 *égale au triple du carré de la distance du point au centre de l'hyperbole; par suite elle est la même pour tous les points* P *situés sur un cercle concentrique à l'hyperbole.*

Note. — M. Mister, professeur à l'Athénée royal de Bruges, a aussi résolu le même problème pour les coniques en général. Autres solutions de MM. Audoynaud, professeur au lycée de Poitiers; Camille Massing, L. Lacauchie, Stanislas Klisiowski, élèves de Sainte-Barbe; Pabon, du lycée de Bordeaux; Gilliot, Rietsch, Alphonse Aubrun, Weil, du lycée de Strasbourg; Morhange et Henry, Legros, Margot, du lycée Charlemagne; Drouard et Pettit, Thurninger, du lycée Saint-Louis; P. Cagny, du lycée Louis-le-Grand; Léon d'Apvril et Albert Robin, du lycée de Grenoble; Bertrand et Grassat, du lycee de Lyon; de Vigneral; Marmier, de l'Estourbeillon, de l'École Sainte-Geneviève; Daguenet, du lycee de Caen; O. Puel, du Prytanée; Roques, soldat au 53e régiment d'infanterie.

Question 714;

PAR M. J. MURENT,
Licencié ès Sciences (à Clermont-Ferrand).

Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . x_5.$$

Nombre des solutions entières et positives.

Nous considérerons d'abord l'équation générale

$$(1)\qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 . x_1 \ldots x_n,$$

dont nous représenterons une solution quelconque par la notation

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n),$$

et nous établirons les propriétés suivantes :

1° *L'équation* (1) *admet toujours au moins une solution, savoir :* $(n, 2, 1, 1, 1, \ldots, 1)$. Dans le cas où l'on a $n = 2$, cette solution se réduit à $(2, 2)$.

2° *Comme on suppose* $n > 1$, *les nombres* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ne peuvent pas être tous égaux à l'unité.*

3° *Parmi les nombres* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *il y en a au moins deux qui sont supérieurs à l'unité.*

En effet, si a_1 seul était plus grand que 1, tous les autres $a_2, a_3, \ldots, a_n$ étant égaux à 1, l'équation (1) se réduirait, pour ces valeurs des inconnues, à l'égalité

$$a_1 + (n - 1) = a_1,$$

égalité impossible, puisqu'on a $n > 1$.

4° *Lorsqu'on a* $n > 2$, *les nombres* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ne peuvent pas être tous supérieurs à l'unité.*

Car en représentant ces nombres par $1 + \alpha_1$, $1 + \alpha_2, \ldots,$ $1 + \alpha_n$, on devrait avoir

$$(1 + \alpha_1) + (1 + \alpha_2) + \ldots + (1 + \alpha_n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_n),$$

d'où

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_n) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = n,$$

égalité impossible, attendu que chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant au moins égal à 1, le premier membre est au moins égal à $2^n - n$, quantité toujours plus grande que n quand on a $n > 2$. En effet, si l'on compare les deux produits

$$2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2, \quad \text{et} \quad n \times 2 \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1,$$

composés chacun de n facteurs dont la somme est la même, on sait que le premier produit dont tous les facteurs sont égaux est plus grand que le second, c'est-à-dire que l'on a $2^n > 2n$, d'où $2^n - n > n$.

5° Il résulte de ce qui précède que lorsqu'on a $n > 2$, toute solution $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de l'équation (1) doit comprendre au moins un nombre égal à l'unité et au moins deux nombres supérieurs à l'unité.

Pour abréger, nous nommerons solution d'indice i toute solution telle que $(a_1, a_2, \ldots, a_i, 1, 1, \ldots, 1)$, comprenant i nombres supérieurs à 1 et $n - i$ nombres égaux à 1. Nous savons déjà que la limite inférieure de l'indice i est 2, et nous allons en chercher une limite supérieure.

Pour cela, représentons les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_i$ par $1 + \alpha_1, 1 + \alpha_2, \ldots, 1 + \alpha_i$. Pour que la solution

$$(a_1, a_2, \ldots, a_i, 1, 1, \ldots, 1)$$

convienne à l'équation (1), il faudra que l'on ait l'égalité

$$\begin{aligned}(1 + \alpha_1) + (1 + \alpha_2) + \ldots + (1 + \alpha_i) + n - i \\ = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_i),\end{aligned}$$

ou la suivante

$$(2) \quad (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_i) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i) = n.$$

Le premier membre de cette dernière étant au moins égal à $2^i - i$, il faudra que l'on ait

$$2^i - i \leqq n.$$

En donnant à i les valeurs successives 2, 3, 4, 5, ..., et formant les valeurs correspondantes de $2^i - i$, la valeur l de i qui donnera la plus grande valeur de $2^i - i$ contenue dans n sera la limite supérieure de i (*).

Les valeurs successives de $2^i - i$ peuvent d'ailleurs se déduire les unes des autres d'après une loi très-simple exprimée par l'identité

$$2^{i+1} - (i+1) = (2^i - i) \times 2 + (i-1),$$

qui donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{rl} i = & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ldots, \\ 2^i - i = & 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 27,\ 58,\ 121,\ldots. \end{array}$$

Dans le cas où n est égal à une des valeurs de $2^i - i$, par exemple à $2^k - k$, on satisfait à l'équation (2) en prenant $i = k$ et faisant $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_i = 1$, ce qui réduit le premier membre à $2^k - k$. Il en résulte pour l'équation (1) la solution

$$(2,\ 2,\ 2,\ldots,\ 2,\ 1,\ 1,\ldots,\ 1),$$

et cette solution est la seule d'indice i, comme on le reconnaît facilement en se reportant à l'équation (2).

6° On voit que par les propriétés précédentes, la résolution de l'équation générale (1) est ramenée à la recherche des diverses solutions d'indices : 2, 3, 4, ..., l.

Nous allons appliquer ces propriétés à l'équation particulière

$$(3) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . x_5,$$

qui fait le sujet de la question 714.

(*) La limite supérieure des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est n ; et la limite supérieure du produit $x_1 . x_2 \ldots x_n$ est $2n$. Pour $n > 2$, la limite inférieure de ce produit est $n + 3$ G.

Le nombre n est ici de la forme $2^i - i$, car on a

$$5 = 2^3 - 3;$$

la limite supérieure de i est donc 3, et l'équation n'a qu'une seule solution d'indice 3, qui est

$$(2, 2, 2, 1, 1).$$

Pour obtenir les solutions d'indice 2, posons, suivant les notations déjà employées,

$$(1 + \alpha_1) + (1 + \alpha_2) + 3 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2),$$

d'où, en réduisant,

$$\alpha_1 \alpha_2 = 4.$$

Décomposant 4 en deux facteurs de toutes les manières possibles, on n'a que deux équations :

$$\alpha_1 \alpha_2 = 2 \times 2,$$

et

$$\alpha_1 \alpha_2 = 4 \times 1.$$

On satisfait à la première en prenant $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, et à la seconde en prenant $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$, d'où résultent, pour l'équation (3), les deux solutions

$$(3, 3, 1, 1, 1)$$

et

$$(5, 2, 1, 1, 1).$$

Cette dernière est celle que nous avions reconnue *à priori* en considérant l'équation générale (1).

En résumé, l'équation (3) n'admet que trois solutions en nombres entiers positifs, savoir :

$$(2, 2, 2, 1, 1), \quad (3, 3, 1, 1, 1), \quad (5, 2, 1, 1, 1).$$

Note. — M. de Virieu, professeur à Lyon, démontre que le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 . x_2 \ldots x_n$$

est au moins égal au nombre des décompositions différentes de $n-1$ en deux facteurs entiers et positifs. En outre, M. de Virieu donne les solutions de cette équation pour les valeurs de n comprises entre 2 et 20.

M. Barrère (Alexandre), élève au lycée de Nîmes, a trouvé les solutions de l'équation

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = x_1 . x_2 \ldots x_5,$$

en remarquant que si x_n représente le plus grand des nombres entiers satisfaisant à l'équation (1), le produit $x_1 . x_2 \ldots x_{n-1}$ est nécessairement égal à l'un des nombres $2, 3, \ldots, n-1$.

La même question a été résolue par MM. P. Cagny, élève au lycée Louis-le-Grand; Boutmy, élève au lycée Saint-Louis; Rezzonico, Agénor Jouglet.

Question 697

(voir 2e série, t. III, p. 140);

PAR M. MAX CORNU,
Élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

L'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à deux surfaces homofocales du second ordre a pour projections, sur les trois plans principaux des deux surfaces, les développées des courbes focales. (MOUTARD.)

On sait que la surface développable circonscrite aux deux surfaces du second degré

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2 + l^2} + \frac{y^2}{b^2 + l^2} + \frac{z^2}{c^2 + l^2} - 1 = 0,$$

est la surface polaire réciproque de la surface dont l'arête de rebroussement est la courbe d'intersection des surfaces polaires réciproques des proposées, et que la projection de l'arête de rebroussement sur un plan quelconque est l'enveloppe de la projection des génératrices de la surface sur le plan considéré.

Je prends pour sphère de transformation celle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0;$$

les deux surfaces deviennent

$$(1)\qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0,$$

$$(2)\qquad (a^2 + l^2)x^2 + (b^2 + l^2)y^2 + (c^2 + l^2)z^2 - 1 = 0.$$

Si je retranche la première équation de la seconde, j'obtiens l'équation d'une troisième surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

qui passe par la courbe d'intersection des deux premières; on voit aussi que cette courbe est commune à toutes les réciproques des surfaces homofocales aux deux premières et qu'elle est imaginaire, d'où l'on peut conclure que toutes les surfaces du second degré homofocales sont inscrites dans une même surface développable, et que cette surface est imaginaire.

La tangente en un point (x, y, z) de la courbe d'intersection a pour équations

$$a^2\mathrm{X}x + b^2\mathrm{Y}y + c^2\mathrm{Z}z - 1 = 0,$$
$$(a^2 + l^2)\mathrm{X}x + (b^2 + l^2)\mathrm{Y}y + (c^2 + l^2)\mathrm{Z}z - 1 = 0.$$

La polaire réciproque de cette droite est une génératrice de la surface développable cherchée, et cette droite a pour équations

$$\frac{\mathrm{X} - a^2x}{x} = \frac{\mathrm{Y} - b^2y}{y} = \frac{\mathrm{Z} - c^2z}{z}.$$

Cette équation ne dépend pas de l^2; donc on a une nouvelle preuve de ce fait, que toutes les surfaces homofocales sont inscrites dans la même surface développable.

Remarque. — La ligne de contact des surfaces avec leur enveloppe est la ligne d'intersection limite de deux surfaces

$$\frac{x^2}{a^2+p^2}+\frac{y^2}{b^2+p^2}+\frac{z^2}{c^2+p^2}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2+q^2}+\frac{y^2}{b^2+q^2}+\frac{z^2}{c^2+q^2}-1=0.$$

Quand q converge vers p, la projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy est

$$\frac{y^2(a^2-b^2)}{(b^2-p^2)(b^2-q^2)}+\frac{z^2(a^2-c^2)}{(c^2-p^2)(c^2-q^2)}+1=0;$$

si $q=p$, il vient

$$\frac{y^2(a^2-b^2)}{(b^2-p^2)^2}+\frac{z^2(a^2-c^2)}{(c^2-p^2)^2}+1=0,$$

courbe imaginaire; donc la surface lieu de ces courbes, dont la projection sur le plan des yz est imaginaire, est elle-même imaginaire.

Je projette les génératrices de la surface sur l'un des plans principaux; au lieu de refaire le calcul pour chaque plan principal, il suffira de faire la permutation tournante des lettres x, y, z; a, b, c.

Je projette la génératrice sur le plan des xy : l'équation de la projection est

$$(3)\qquad \frac{X-a^2x}{x}=\frac{Y-b^2y}{y};$$

x et y sont liés entre eux par la relation

$$(4)\qquad (a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2-1=0,$$

qu'on obtient en éliminant z entre les équations (1) et (2).

On sait que lorsqu'on a, entre deux paramètres u et v, la relation

$$\frac{P^2}{(P^2-Q^2)^2u^2}+\frac{Q^2}{(P^2-Q^2)^2v^2}-1=0,$$

la droite $ux+vy+1=0$ est normale à la courbe

$$\frac{x^2}{P^2}+\frac{y^2}{Q^2}-1=0.$$

L'équation (3) peut s'écrire

$$X\frac{1}{x(b^2-a^2)}+Y\frac{-1}{y(b^2-a^2)}-1=0.$$

L'équation (4), qui exprime la relation entre x et y, peut se mettre sous la forme

$$\frac{a^2-c^2}{(a^2-b^2)^2\left[\frac{1}{(a^2-b^2)x}\right]^2}+\frac{b^2-c^2}{(a^2-b^2)^2\left[\frac{-1}{(a^2-b^2)y}\right]^2}-1=0,$$

ce qui montre que la droite considérée, c'est-à-dire la projection d'une génératrice de la surface développable sur le plan des xy, est constamment normale à la courbe

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}-1=0,$$

qui est la courbe focale relative au plan des xy. Donc cette droite enveloppe la développée de la courbe focale considérée.

Démonstration géométrique.

On sait qu'un foyer est une sphère de rayon nul doublement tangente à la surface aux points où la directrice correspondant à ce foyer coupe la surface.

Considérons deux surfaces homofocales du second degré et un de leurs foyers F ; à ce foyer correspondra une directrice différente pour les deux surfaces. Imaginons deux plans tangents aux points de contact de la sphère avec chacune des deux surfaces : ils se coupent suivant une droite tangente à la sphère et tangente aussi à la courbe, point de contact de chaque plan tangent avec la sphère. Donc la droite considérée est une génératrice de la surface développable circonscrite aux deux surfaces homofocales; cette droite rencontre les deux directrices correspondant au foyer F aux points où elle touche chacune des deux surfaces; donc la projection de cette droite sur le plan qui contient le foyer sera la droite qui joint les pieds des directrices; on voit d'ailleurs que les pieds des deux directrices et le foyer sont sur une même ligne droite, projection de quatre génératrices de la surface. On sait que la ligne qui joint un foyer au pied de la directrice correspondante est normale à la conique focale.

Donc la projection d'une génératrice de la surface sur un plan principal commun aux deux surfaces enveloppe la développée de la courbe focale relative au plan principal considéré.

Note. — MM. Albert Sartiaux et Nouette, élèves de l'École Polytechnique, nous ont adressé des démonstrations analytiques du même théorème.

Questions 700 *et* 719

(voir p. 48);

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

M. Picart, professeur au lycée Charlemagne, a donné dans ce recueil (t. III, 2e série, p. 532) une très-élégante solution, fondée sur des considérations de Géométrie infinitésimale, de la question 700, posée par M. Strebor. Je trouve aujourd'hui, dans le numéro de janvier 1865, une nouvelle question relative à la même surface, et qui n'est qu'un corollaire de la précédente.

Voici une autre manière d'arriver à ces résultats; elle est fondée sur l'emploi des coordonnées elliptiques.

Soient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-\beta^2}+\frac{z^2}{\rho^2-\gamma^2}=1,\\ &\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2-\mu^2}=1,\\ &\frac{x^2}{\gamma^2}-\frac{y^2}{\beta^2-\nu^2}-\frac{z^2}{\gamma^2-\nu^2}=1,\end{aligned}\right.$$

les équations d'un système triple de surfaces homofocales et orthogonales du second ordre; ρ, μ, ν sont des paramètres variables, et β, γ des constantes. On supposera $\beta<\gamma$, $\rho>\gamma$, $\beta<\mu<\gamma$, et $\nu<\beta$, de sorte que la première des équations (1) représente un système d'ellipsoïdes homofocaux, les deux autres des hyperboloïdes; les trois surfaces se coupent orthogonalement, et leurs intersections sont des lignes de courbure sur chacune d'elles, d'après le beau théorème de M. Ch. Dupin.

Par chaque point (x, y, z) de l'espace passent trois surfaces du système (1) qu'on obtiendrait en résolvant les équations du système (1) par rapport à ρ, μ, ν, et en exprimant ces trois quantités en fonction des coordonnées particulières du point donné. Réciproquement, étant données des valeurs de ρ, μ, ν, satisfaisant aux conditions ci-dessus, on en déduit les valeurs des coordonnées du point (x, y, z) où se coupent les trois surfaces (ρ), (μ), (ν). C'est pourquoi l'on peut considérer les paramètres variables ρ, μ, ν comme les coordonnées d'un point de l'espace. Toute relation entre ρ, μ, ν représentera une surface, dont on traduira l'équation en coordonnées rectilignes en remplaçant ρ, μ, ν par leurs expressions en x, y, z, tirées des équations (1). Ainsi $\rho = c$ représente un des ellipsoïdes représentés par la première des équations (1) ; de même $\mu = c'$, $\nu = c''$ représentent deux hyperboloïdes homofocaux.

Cela posé, proposons-nous de trouver, en fonction de ρ, μ, ν, l'équation de la *surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes* (ρ). Pour l'obtenir, il suffit de remarquer que ces cercles sont les intersections des ellipsoïdes (ρ) par les sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 - \beta^2, \tag{2}$$

ayant pour rayons les demi-axes moyens des ellipsoïdes; donc on obtiendra l'équation de la surface, que, pour abréger, je désignerai par S, en éliminant ρ entre l'équation (2) et la première du groupe (1). Mais cette élimination se fait d'une manière très-élégante, en remarquant que les équations (1) donnent la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

qui, combinée avec l'équation (2), donne

$$\mu^2 + \nu^2 = \gamma^2. \tag{3}$$

C'est précisément l'équation de S.

La forme seule de cette équation fournit immédiatement la démonstration des théorèmes de M. Strebor.

1° *La surface* S *coupe orthogonalement les ellipsoïdes* (ρ). (Quest. 700.)

On sait que pour que deux surfaces

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

se coupent orthogonalement, on doit avoir

$$\frac{dF}{dx}\cdot\frac{df}{dx}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{df}{dy}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{df}{dz}=0.$$

Or, dans le cas actuel, cette relation devient

$$\left\{\begin{array}{l}\mu\left[\dfrac{d\mu}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}+\dfrac{d\mu}{dy}\cdot\dfrac{d\rho}{dy}+\dfrac{d\mu}{dz}\cdot\dfrac{d\rho}{dz}\right]\\+\nu\left[\dfrac{d\nu}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}+\dfrac{d\nu}{dy}\cdot\dfrac{d\rho}{dy}+\dfrac{d\nu}{dz}\cdot\dfrac{d\rho}{dz}\right]\end{array}\right\}=0,$$

qui est identiquement vérifiée en vertu des équations (1).

2° *Les trajectoires orthogonales des cercles communs à la surface* S *et aux ellipsoïdes* (ρ) *sont les lignes de courbure communes aux hyperboloïdes* (μ) *et* (ν). (Quest. 719.)

Désignons par c' une constante comprise entre β et γ; pour $\mu = c'$, on déduit de l'équation (3)

$$\nu^2=\gamma^2-c'^2=c''^2;$$

on peut disposer de c' de manière que c'' soit $<\beta$; et on voit alors que les équations

$$\mu=c',\quad \nu=c''$$

représentent deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes, du système (1), dont l'intersection, qui est une ligne de courbure sur chacun d'eux, est tout entière sur la surface S. D'ailleurs, cette intersection est normale à tous les ellipsoïdes (ρ); donc elle coupe orthogonalement toutes les lignes de courbure de ces ellipsoïdes, et en particulier les cercles communs à la surface S et aux ellipsoïdes (ρ).