NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BARBIER

Construction des points de contact d'un cercle tangent à trois cercles donnés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 313-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__313_1>

CONSTRUCTION

des points de contact d'un cercle tangent à trois cercles donnés ;

PAR M. E. BARBIER.

Propositions préliminaires.

1. Le point de contact de deux cercles tangents est leur centre d'homothétie ; réciproquement, si le centre d'homothétie de deux circonférences appartient à l'une d'elles, on peut affirmer que les deux circonférences se touchent au centre d'homothétie.

2. Si deux triangles sont homothétiques et ont un sommet commun, les circonférences circonscrites à ces triangles se touchent au sommet commun ; réciproquement, si deux circonférences sont tangentes, leur point de contact est le sommet commun et le centre d'homothétie de deux triangles inscrits respectivement dans chaque circonférence.

3. Si une circonférence O est à la fois tangente à trois circonférences O_1, O_2 et O_3 respectivement aux points P_1, P_2 et P_3, chacun de ces points est le centre d'homothétie du triangle $P_1 P_2 P_3$ et d'un triangle inscrit dans la circonférence O_1, ou O_2, ou O_3. Réciproquement, si un triangle T a un sommet commun avec chacun des trois triangles T_1, T_2 et T_3, s'il est de plus homothétique à chacun d'eux, la circonférence circonscrite au triangle T est à la fois tangente aux cercles circonscrits aux triangles T_1, T_2 et T_3.

4. Les côtés du triangle T coupent en C_1, C_2 et C_3 un axe de similitude des circonférences O_1, O_2 et O_3. Ces points C_1, C_2 et C_3 sont des centres d'homothétie des circonférences prises deux à deux et des triangles pris deux à deux.

5. Soient R_1, R_2 et R_3 les rayons des circonférences O_1, O_2 et O_3; soient aussi G_1, G_2 et G_3 trois points de l'axe de similitude $C_1 C_2 C_3$ déterminés ainsi qu'il suit: G_1 par l'une des deux proportions

$$\frac{G_1 C_2}{C_1 C_2} = \frac{R_1}{R_3} \quad \text{et} \quad \frac{G_1 C_3}{C_1 C_3} = \frac{R_1}{R_2},$$

et G_2 et G_3 par des proportions analogues; les côtés du triangle T_1 passent par les points G_1, C_2 et C_3; ceux du triangle T_2 par les points C_1, G_2 et C_3; enfin ceux du triangle T_3, par les points C_1, C_2 et G_3.

De ces propositions préliminaires il résulte que le problème de *trouver une circonférence* O *à la fois tangente aux trois circonférences données* O_1, O_2 *et* O_3 revient à cet autre problème : *Trouver un triangle* T_1 *inscrit dans le cercle* O_1 *et dont les côtés passent par les points* G_1, C_2 *et* C_3 qui sont faciles à déterminer.

Le point de contact des circonférences O et O_1 est le sommet de T_1 opposé au côté qui passe par le point G_1 ; on déterminerait de même les points de contact de O et de O_2, ou de O et O_3.

THÉORÈME. — *Si les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle donné passent par quatre points en ligne droite, une infinité de quadrilatères peuvent être inscrits dans le même cercle, de manière que leurs quatre côtés passent par ces quatre mêmes points.*

On pourrait exprimer le même fait en disant que le quadrilatère inscrit peut pivoter autour de quatre points en ligne droite.

Ce théorème donne une solution simple du problème suivant : *Inscrire dans un cercle* O_1 *un triangle* T_1 *dont les côtés passent par les trois points en ligne droite* G_1, C_2 *et* C_3.

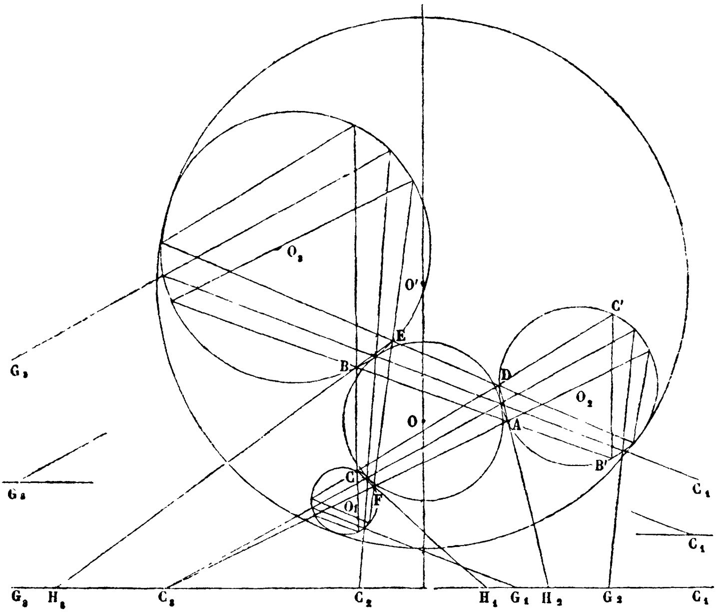
Par les extrémités d'une corde dirigée sur G_1, mener deux cordes dirigées, l'une sur C_2, l'autre sur C_3. En général ces trois cordes ne feront pas une ligne fermée; on la fermera par une droite qui complète un quadrilatère inscrit et qui coupe la droite $G_1C_2C_3$ en un point H_1. Il suffit de mener du point H_1 une tangente au cercle O_1 pour avoir au point de contact l'élément auquel se réduira un côté du quadrilatère inscrit dégénéré dans le triangle demandé après avoir pivoté autour des points G_1, H_1, C_2 et C_3.

On peut donc par ce moyen déterminer chacun des points de contact d'une circonférence O tangente aux trois cercles O_1, O_2 et O_3.

Mais les constructions peuvent être un peu modifiées de manière à donner à la fois les trois points de contact et à rendre inutile la détermination des points G_1, G_2 et G_3.

Construction des points de contact d'un cercle O *tangent à trois cercles donnés* O_1, O_2 et O_3.

Considérons un axe de similitude $C_1C_2C_3$ des trois cercles : entre les circonférences O_2 et O_3, par un point A



pris à volonté sur O_2, menons une droite AB dirigée sur C_1 et non terminée par des points homologues ; menons d'une manière analogue BC et CD.

Le point D auquel on arrive est le même que celui auquel on serait arrivé en inscrivant dans la circonférence O_2 un quadrilatère AB′C′D dont les trois premiers côtés passent par C_1, G_2 et C_3.

De cette proposition facile à démontrer il résulte que la droite AD passe par le point H_2. Donc si l'on mène DE dirigée sur C_1, la droite BE passera par le point H_3; enfin menant EF dirigée sur C_2, on aura une droite CF qui passe par le point H_1.

Les points H_1, H_2 et H_3 étant déterminés, les tangentes menées de ces points respectivement aux trois cercles donnés détermineront les points de contact de deux circonférences O et O′ tangentes aux trois cercles.

Remarques. — I. Nous avons cherché DAH_2 en commençant les constructions au point A; nous aurions pu tout aussi bien les commencer au point D: cette construction devrait donc aboutir au point A.

On voit donc que les côtés opposés de l'hexagone ABCDEF concourent en trois points en ligne droite C_1, C_2 et C_3.

II. La construction que nous avons faite du quadrilatère AB′C′D étant répétée à partir de tous les sommets de l'hexagone ABCDEF, on aura inscrit dans les trois cercles O_1, O_2 et O_3 des hexagones homothétiques. Cette proposition est facile à démontrer.

III. Le quadrilatère ABCD est inscriptible dans un cercle; en effet, les angles CDA et CBA interceptant des arcs homothétiques dans les circonférences O_2 et O_3 sont égaux et par suite inscriptibles dans un même segment de cercle.

Cette proposition s'appliquant à quatre sommets consécutifs de l'hexagone ABCDEF, il en résulte que *cet hexagone est inscriptible dans un cercle* ω.

IV. La puissance du point H_1 par rapport au cercle circonscrit à l'hexagone ABCDEF est $H_1E \times H_1C$; elle est égale à la puissance de H_1 par rapport au cercle O_1, et et par suite le point H_1 a la même puissance par rapport à tous les cercles circonscrits aux hexagones analogues à ABCDEF qu'on pourrait obtenir en changeant la position du point A sur O_2. Il résulte de là que H_1 appartient à la corde commune à deux quelconques de ces cercles ; on en dirait autant du point H_2 et du point H_3. On peut donc énoncer ce théorème :

Toutes les circonférences ω circonscrites aux hexagones ABCDEF *ont pour corde commune réelle ou idéale l'axe de similitude* $C_1 C_2 C_3$.

En particulier, les deux circonférences O et O′ ont pour corde commune l'axe de similitude $C_1 C_2 C_3$. Leurs centres sont sur une droite perpendiculaire à l'axe de similitude.

V. Chacun des quatre axes de similitude de trois cercles donnés est la corde commune réelle ou idéale de deux circonférences tangentes aux trois cercles.

On peut donner une autre construction simple du cercle tangent à trois cercles donnés.

A partir d'un point quelconque de O_1, entre les cercles O_1 et O_2, mener une droite passant par un centre de similitude A de O_1 et de O_2 et non terminée par des points homologues ; à partir du point ainsi trouvé sur O_2, entre les cercles O_2 et O_3, mener une droite passant par un centre de similitude B de O_2 et de O_3 et non terminée par des points homologues.

Le cercle ω qui passe par les trois points ainsi trouvés peut être un cercle tangent aux trois cercles donnés ; mais généralement le cercle ω coupera les trois cercles O_1, O_2 et O_3, et il faudra, pour avoir un des points de contact cherchés, celui qui est sur O_1 par exemple, mener la corde commune à ω et à O_1 et, par l'intersection de cette corde avec la droite AB, mener une tangente à O_1.

Les cercles ω, et en particulier les deux cercles tangents qui font partie de cette suite de cercles, ont la droite AB pour axe radical commun.