NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 320-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__320_1>

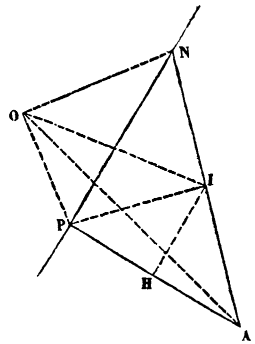
SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 717;

PAR M. LOUIS PABON,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux.

ÉNONCÉ. — *Construire une hyperbole équilatère, connaissant le centre* O, *une tangente* PN, *et un point* A *de la courbe.*

Soient P le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la tangente PN donnée; N le point de contact de cette tangente; I le milieu de la corde AN : on sait que les quatre points O, P, I, N appartiennent à une même circonférence. Il en résulte que le point I se trouve sur l'arc d'un segment capable du supplément de l'angle OPN, décrit sur la droite OA comme corde, car le quadrilatère



inscriptible OPIN donne

$$OIN = OPN,$$

et par suite

$$OIA = 180^\circ - OPN.$$

En outre, le point I se trouve sur une parallèle à PN, menée par le milieu H de AP; il sera donc déterminé par l'intersection de cette parallèle et de l'arc du segment capable décrit. On obtiendra ensuite le point de contact N, en prolongeant la droite AI jusqu'à sa rencontre avec la tangente AN.

La question est ainsi ramenée à construire une hyperbole, connaissant un demi-diamètre transverse ON, et la direction NP de son conjugué.

Note. — La même question a été résolue par MM. R. La Rougery, Gazères, élèves du lycée de Bordeaux; J.-B. Muntz, du lycée de Strasbourg; Albert Ribaucour, du lycée de Lille (classe de M. Diguet); J. Legrand, du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant); Boussu, du lycée Bonaparte; Talayrach, du lycée Charlemagne; et par MM. E. Janin, de Vigneral, Marmier, M. L.

Question 722;

PAR M. CH. PÉTRELLE,
Élève de l'institution Sainte-Barbe de Paris.

ÉNONCÉ. — *Par chacun des sommets d'un triangle* ABC, *on mène une parallèle au côté opposé; on désigne par* A_1, B_1, C_1 *les sommets opposés aux points* A, B, C *du nouveau triangle formé par ces parallèles : démontrer que le cercle des neuf points du triangle* ABC *touche les cercles des neuf points des triangles* A_1BC, B_1AC, C_1AB *aux milieux des côtés* BC, AC, AB *respectivement.* (JOHN GRIFFITHS.)

Il est évident que les milieux α, β, γ des côtés BC, CA, AB sont respectivement des centres de symétrie pour les couples de triangles

$$ABC,\ A_1BC;\quad ABC,\ AB_1C;\quad ABC,\ ABC_1.$$

Considérons l'un de ces couples, le premier par exemple; nous voyons que la droite OO_1 qui unit les centres O, O_1 des cercles des neuf points des triangles ABC, A_1BC passe par le point α milieu de BC, et comme ces deux cercles ont le point α commun, ils se touchent nécessairement en ce point.

Note. — Des démonstrations géométriques à peu près semblables nous ont été adressées par MM. R. La Rougery, J. Gazères, élèves du lycée de Bordeaux; Jules Hatte, Nievenglowski, du lycée Charlemagne; P. Cagny, du lycée Louis-le-Grand; Adolphe Richard, du lycée de Nancy; Grassat, du lycée de Lyon; H. de l'Estourbeillon, élève de l'École Sainte-Geneviève; A. Juncker, J. Dalseme, Perseval, de l'institution Sainte-Barbe (Paris); Rossigneux, du collège Stanislas; Toubin, de Lons-le-Saulnier; Audoynaud; C. Regnard; Marmier; Autefage. MM. Audoynaud et Dalseme ont aussi démontré par le calcul la proposition énoncée.

Question 723

(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 86);

PAR M. A. JUNCKER,

Élève de l'institution Sainte-Barbe (cours de M. Bouquet).

Soient α, β, γ *les milieux des côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, O *le centre du cercle circonscrit. Menons* $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ *et prolongeons ces droites jusqu'en* A', B', C', *de telle sorte que*

$$OA' = 2O\alpha,\quad OB' = 2O\beta,\quad OC' = 2O\gamma.$$

Démontrer que le cercle des neuf points du triangle ABC *passe par les points d'intersection de la circonférence circonscrite et de la circonférence conjuguée à chacun des triangles* OB'C', OC'A', OA'B', A'B'C'.

(JOHN GRIFFITHS.)

Remarquons en premier lieu que le cercle des neuf points du triangle ABC coïncide avec celui de l'un quelconque des triangles OB'C', OC'A', OA'B', A'B'C'.

Prenons d'abord A'B'C'; il est homothétique au triangle $\alpha\beta\gamma$ par rapport au centre O, le rapport d'homothétie étant 2. Donc si nous appelons D' et δ les centres des cercles circonscrits à ces deux triangles, les points O, δ, D' sont en ligne droite, et l'on a

$$O\delta = \delta D'.$$

O étant le point de concours des hauteurs du triangle A'B'C', il résulte d'un théorème connu que δ est le centre du cercle des neuf points de ce triangle. Son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit à A'B'C' ou à son égal ABC; le cercle des neuf points est donc le même pour ces deux triangles. Il est d'ailleurs évident qu'il passe par les milieux des côtés des triangles OB'C', OC′A′, OA′B′. Le théorème à démontrer peut donc s'énoncer ainsi :

« Dans un triangle (A′B′C′ par exemple), le cercle des neuf points, le cercle circonscrit et le cercle conjugué ont même axe radical. »

Pour le démontrer, observons que le cercle conjugué à A′B′C′ a son centre en O (*), point de concours des hauteurs et centre de similitude externe du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

ρ étant son rayon et H le pied de la hauteur abaissée du sommet B′, on a

$$\rho^2 = \mathrm{OB}'.\mathrm{OH}.$$

Appelons R le rayon du cercle circonscrit, et l la distance OD′ égale à 2Oδ; le rayon du cercle des neuf points est $\frac{\mathrm{R}}{2}$.

Ceci posé, soit E l'un des points communs à ces deux circonférences :

$$\frac{\mathrm{O}\delta}{\mathrm{OD}'} = \frac{\delta\mathrm{E}}{\mathrm{D}'\mathrm{E}} = \frac{1}{2};$$

OE est donc l'une des bissectrices extérieures du triangle δED′, et l'on démontre en géométrie qu'on a

$$\overline{\mathrm{OE}}^2 = \mathrm{O}\delta.\mathrm{OD}' - \delta\mathrm{E}.\mathrm{D}'\mathrm{E}$$
$$= \frac{1}{2}(l^2 - \mathrm{R}^2).$$

Or le point H appartient au cercle des neuf points; si l'on appelle K le second point d'intersection de la hauteur B′H

(*) Pour que le rayon de ce cercle soit réel, il faut et il suffit que l'un des angles du triangle A′B′C′ soit obtus; dans cette démonstration géométrique, l'angle B′ est supposé obtus.

avec la circonférence circonscrite, on a donc

$$OH = \frac{1}{2} OK,$$

et par conséquent

$$\rho^2 = \frac{1}{2} OB'.OK,$$

$$= \frac{1}{2}(l^2 - R^2),$$

$$= \overline{OE}^2.$$

La circonférence conjuguée passe donc par le point E.

La démonstration qui précède suppose que les circonférences se coupent en des points réels. Il est facile de vérifier par le calcul que le théorème est général.

En effet, si l'on prend pour axes de coordonnées l'un des côtés du triangle, A'C' par exemple, et la hauteur correspondante; a, b, c étant les coordonnées des sommets A', B', C', les équations des circonférences considérées sont

$$\left\{\begin{aligned} &x^2 + y^2 - \frac{a+c}{2} x + \frac{ac - b^2}{2b} y = 0, \\ &x^2 + y^2 - (a+c)x - \frac{ac + b^2}{b} y + ac = 0, \\ &x^2 + y^2 + \frac{2ac}{b} y - ac = 0. \end{aligned}\right.$$

Et il est visible qu'en ajoutant les deux dernières équations membre à membre, on retrouve la première.

Note. — La même proposition a été démontrée par MM. Ch. Pétrelle, élève de l'institution Sainte-Barbe; A. Morel, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet); Gazères, du lycée de Bordeaux; Niewenglowski, du lycée Bonaparte; et Autefage, S. J.

Question 727

(voir 2e série, t. IV, p. 31) ;

PAR M. CAMILLE MASSING,
Élève de l'institution Sainte-Barbe (classe de M. Tarbouriech).

Soit AB *un diamètre d'un cercle,* C *le centre, et soit pris sur ce diamètre* $CP = \frac{1}{3}AC$ (*). *Ayant tiré une droite quelconque par* P *rencontrant la circonférence en* Q, R, *menons les droites* BR, QC; *et soit* S *le point de rencontre de* QC *prolongé avec* BR. *En désignant l'angle* BSQ *par* ψ *et l'angle* CBS *par* φ, *il faut prouver que*

$$\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\right)^3. \qquad \text{(STREBOR.)}$$

Je mène CR . en désignant par x_1 et y_1 les coordonnées du point R, par x_2, y_2 celles du point Q, par rapport à la droite AB prise pour axe des x et à une perpendiculaire à cette droite élevée en C prise pour axe des y, j'ai :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\cos 2\varphi, \\ y_1 &= \sin 2\varphi, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x_2 &= \cos(\varphi + \psi), \\ y_2 &= -\sin(\varphi + \psi), \end{aligned}\right.$$

car l'angle RCB est égal à $180° - 2\varphi$ et l'angle ACQ à $180° - \varphi - \psi$. J'ai pris pour unité le rayon du cercle donné.

L'abscisse CP du point P s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de la droite qui joint les deux points Q, R. Je trouve ainsi :

$$CP = -\frac{1}{3} = \frac{\cos 2\varphi \sin(\varphi + \psi) - \sin 2\varphi \cos(\varphi + \psi)}{-\sin(\varphi + \psi) - \sin 2\varphi},$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. Le point P doit être entre C et A.

d'où

$$\frac{1}{3}=\frac{\sin(\psi-\varphi)}{\sin(\psi+\varphi)+\sin 2\varphi},$$

relation que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\cos\varphi(\sin\psi-\sin\varphi)=2\sin\varphi\cos\psi,$$

et en élevant les deux membres au carré :

$$(1-\sin^2\varphi)(\sin^2\psi+\sin^2\varphi-2\sin\varphi\sin\psi]=4\sin^2\varphi(1-\sin^2\psi].$$

Effectuant et ordonnant par rapport à $\sin\varphi$, je trouve :

$$\sin^4\varphi-2\sin\psi\sin^3\varphi-3(\sin^2\psi-1)\sin^2\varphi$$
$$+2\sin\psi\sin\varphi-\sin^2\psi=0,$$

ou

$$\sin^2\varphi[\sin\varphi+\sin\psi][\sin\varphi-3\sin\psi]$$
$$+(\sin\varphi+\sin\psi)(3\sin\varphi-\sin\psi]=0.$$

Supprimant alors le facteur $\sin\varphi+\sin\psi$, il reste

$$\sin^3\varphi-3\sin^2\varphi\sin\psi+3\sin\varphi-\sin\psi=0,$$

relation qui n'est autre que celle que l'on obtient en considérant l'expression

$$\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}=\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^3$$

en chassant le dénominateur et en ordonnant par rapport à $\sin\varphi$.

Remarque. — L'équation

$$\frac{1}{3}=\frac{\sin(\psi-\varphi)}{\sin(\varphi+\psi)+\sin 2\varphi}$$

donne la relation

$$\frac{\sin\frac{\psi-\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi+\psi}{2}}=\frac{1}{3}:$$

mais cette relation offre moins de symétrie que la relation proposée.

Note. — La même question a été traitée par MM. O. Puel, Viant, du Prytanée; La Rougery, du lycée de Bordeaux; Bichat, du lycée de Nancy; Grassat, de Lyon; Demon, du lycée de Douai; par MM. Audoynaud, Autefage, du Ménil, du collége de Sorrèze.

Même question;

PAR M. V. NIÉBYLOWSKI,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée Bonaparte.

Quelle que soit la position de QR, on a

$$\mathrm{CQP} = \frac{\mathrm{SCR}}{2} = \frac{\psi + \varphi - 2\varphi}{2} = \frac{\psi - \varphi}{2};$$

d'où

$$\mathrm{CPQ} = \frac{\psi + 3\varphi}{2}.$$

Exprimons que $\mathrm{CP} = \frac{1}{3}\mathrm{CQ}$, dans le triangle CPQ : on a

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin\frac{\psi-\varphi}{2}}{\sin\frac{\psi+3\varphi}{2}},$$

d'où

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin\frac{\psi-\varphi}{2}}{\sin\frac{\psi+3\varphi}{2} - \sin\frac{\psi-\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{\psi-\varphi}{2}}{2\cos\frac{\psi+\varphi}{2}\sin\varphi},$$

d'où

$$\sin\frac{\psi-\varphi}{2} = \cos\frac{\psi+\varphi}{2}\sin;$$

et développant,

$$(1)\quad \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} = \sin\varphi\left(\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Or les angles $\frac{\psi}{2}$ et $\frac{\varphi}{2}$ étant toujours $\leqq \frac{\pi}{4}$, les valeurs de $\sin\frac{\psi}{2}$, $\cos\frac{\psi}{2}$ et $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$ en fonction de $\sin\psi$ et $\sin\varphi$ seront donc

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\psi} \pm \sqrt{1-\sin\psi}\right)$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\varphi} \pm \sqrt{1-\sin\varphi}\right).$$

En substituant dans (1), il vient :

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\sqrt{1+\sin\psi} + \sqrt{1-\sin\psi}\right)\left(\sqrt{1+\sin\varphi} - \sqrt{1-\sin\varphi}\right) \\ &\qquad - \left(\sqrt{1+\sin\varphi} + \sqrt{1-\sin\varphi}\right)\left(\sqrt{1+\sin\psi} - \sqrt{1-\sin\psi}\right) \\ &= \sin\varphi\Big[\left(\sqrt{1+\sin\psi} - \sqrt{1-\sin\psi}\right)\left(\sqrt{1+\sin\varphi} - \sqrt{1-\sin\varphi}\right) \\ &\qquad - \left(\sqrt{1+\sin\psi} + \sqrt{1-\sin\psi}\right)\left(\sqrt{1+\sin\varphi} + \sqrt{1-\sin\varphi}\right)\Big]. \end{aligned}\right.$$

En effectuant et en simplifiant on a

$$(3)\left\{\begin{aligned} &\sqrt{(1+\sin\psi)(1-\sin\varphi)} - \sqrt{(1+\sin\varphi)(1-\sin\psi)} \\ &= \sin\varphi\left[\sqrt{(1+\sin\psi)(1-\sin\varphi)} + \sqrt{(1+\sin\varphi)(1-\sin\psi)}\right], \end{aligned}\right.$$

ce qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &(1-\sin\varphi)\sqrt{(1+\sin\psi)(1-\sin\varphi)} \\ &= (1+\sin\varphi)\sqrt{(1+\sin\varphi)(1-\sin\psi)}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^2 = \frac{(1+\sin\varphi)(1-\sin\psi)}{(1-\sin\varphi)(1+\sin\psi)},$$

ou

$$\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi} = \left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque — Lorsque le point Q va de A vers B, l'angle $BCS = \pi - (\psi + \varphi)$ croît de zéro à π; en A l'angle est nul, $\psi = \varphi = \frac{\pi}{2}$; en B, $\psi = \varphi = 0$.

La somme $\psi + \varphi$ va donc en décroissant d'une manière continue quand Q va de A vers B, ψ restant toujours $> \varphi$ dans l'intervalle, et comme aux deux points limites A et B.

La différence $\psi - \varphi$ est nulle : il s'ensuit que dans l'intervalle elle passera par un maximum, c'est ce qui a lieu lorsque QR est perpendiculaire à AB.

De plus, le maximum des angles ψ et φ est égal à $\frac{\pi}{2}$.

Généralisation. — Considérons le cas plus général où

$$CP = \frac{1}{n} CQ:$$

il vient alors

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\psi + 3\varphi) - \sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi)} = \frac{1}{n-1},$$

d'où

$$\frac{n-1}{2} \sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \cos \frac{1}{2}(\psi + \varphi) \sin \varphi,$$

et, en effectuant les mêmes transformations que pour le premier cas,

$$\left(\frac{\frac{n-1}{2} - \sin \varphi}{\frac{n-1}{2} + \sin \varphi} \right)^2 = \frac{(1 + \sin \varphi)(1 - \sin \psi)}{(1 - \sin \varphi)(1 + \sin \psi)},$$

d'où

$$\frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \times \left(\frac{1 - \frac{2}{n-1} \sin \varphi}{1 + \frac{2}{n-1} \sin \varphi} \right)^2.$$

Si l'on fait $n = 3$, on a bien

$$\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\right)^3;$$

dans le cas où $n = 2$, il vient

$$\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\right)\left(\frac{1 - 2\sin\varphi}{1 + 2\sin\varphi}\right)^2.$$

D'où ce théorème pour le triangle équilatéral inscrit : Si on joint le milieu P d'un côté du triangle équilatéral au sommet opposé B, que par P on mène une sécante quelconque qui coupe la circonférence en Q et R, et qu'on joigne BR et QC (C centre du cercle) prolongé jusqu'en S, intersection avec BR, on a, en posant $BSQ = \psi$, $CBS = \varphi$,

$$\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\left(\frac{1 - 2\sin\varphi}{1 + 2\sin\varphi}\right)^2,$$

et des théorèmes analogues pour d'autres polygones.