NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PIERRE DELAITRE

Note sur la question proposée au concours général pour la classe de mathématiques spéciales en 1858

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 353-360

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__353_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE SUR LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL pour la classe de Mathématiques spéciales en 1858;

PAR M. PIERRE DELAITRE,
Élève du lycee Bonaparte.

Cette question est énoncée dans le numéro de juillet 1859 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Réduite à sa partie essentielle, elle consiste à trouver le nombre des racines réelles de l'équation

$$h \sin^4 x = \sin(x - \alpha)$$

comprises entre o et 2π, h étant un nombre positif et α un angle aussi donné compris entre o et π.

Deux professeurs se sont occupés de cette question dans le numéro cité et dans le suivant. Ils considèrent les racines de l'équation comme les abscisses des points d'intersection des deux courbes représentées par

$$y = h \sin^4 x,$$
$$y = \sin(x - \alpha).$$

En construisant ces courbes (*voir* p. 284 et suiv.), ils mettent en évidence deux racines réelles comprises entre o et 2π. Ils reconnaissent encore que pour des valeurs convenables des données, l'équation peut avoir deux autres racines réelles dans le même intervalle. Afin de trouver dans quels cas ces deux racines existent, ils cherchent d'abord les conditions pour que les deux courbes soient tangentes; mais la complication de leur calcul ne leur permet pas d'arriver à des formules générales. Ils ne font qu'indiquer une règle pratique pour chaque cas particulier. Abordant ensuite la question proposée, ils se bornent encore à tracer la marche à suivre dans les exemples numériques, sans avoir le soin d'appuyer leurs assertions sur une démonstration rigoureuse; de sorte qu'au point de vue théorique la question ne me paraît pas épuisée.

Je me propose, dans cette Note, de trouver les conditions générales pour que l'équation

$$h \sin^4 x = \sin(x - \alpha)$$

ait quatre racines réelles entre o et 2π.

Je ferai deux remarques préliminaires :

1° Il suffit de faire varier x de α à $\pi+\alpha$, car il est évident qu'en dehors de cet intervalle l'équation ne sera jamais satisfaite.

2° On peut toujours supposer $\alpha<\frac{\pi}{2}\cdot$ Soit en effet α' une valeur de α supérieure à $\frac{\pi}{2}\cdot$ Posons

$$\alpha'=\pi-\alpha'_1,$$

d'où

$$\alpha'_1<\frac{\pi}{2}\cdot$$

L'équation

$$h\sin^4 x=\sin(x-\alpha')$$

deviendra

$$h\sin^4 x=-\sin(x+\alpha'_1).$$

En changeant x en $2\pi-x$, on a

$$h\sin^4 x=\sin(x-\alpha'_1),$$

ce qui nous ramène au cas $\alpha<\frac{\pi}{2}\cdot$ Il suffit, d'après cela, de faire varier x de 0 à π, car entre π et $\pi+\alpha$ la figure montre qu'il y aura toujours une racine et une seule.

Ceci posé, prenons les logarithmes des deux membres de l'équation proposée, ce qui nous donne

$$(1)\qquad lh+4l\sin x-l\sin(x-\alpha)=0;$$

la fonction

$$\varphi=lh+4l\sin x-l\sin(x-\alpha)$$

a pour dérivée

$$\frac{4\cos x}{\sin x}-\frac{\cos(x-\alpha)}{\sin(x-\alpha)}=\frac{4\cos x\sin(x-\alpha)-\sin x\cos(x-\alpha)}{\sin x\sin(x-\alpha)},$$

qu'on peut écrire, par des transformations trigonométriques connues,

$$\frac{\frac{3}{2}\left[\sin(2x-\alpha)-\frac{5}{3}\sin\alpha\right]}{\sin x \sin(x-\alpha)}.$$

Pour que l'équation (1) ait plus d'une racine entre 0 et π, il est nécessaire que la dérivée s'annule dans cet intervalle ou que

$$\sin(2x-\alpha)=\frac{5}{3}\sin\alpha,$$

ce qui exige

$$\frac{5}{3}\sin\alpha<1$$

ou

$$\sin\alpha<\frac{3}{5}.$$

Si cette condition n'est pas remplie, il y aura une racine etu ne seule entre 0 et π, et par conséquent l'équation aura deux racines réelles comprises entre 0 et 2π.

La condition

$$\sin\alpha<\frac{3}{5}$$

étant remplie, posons

$$\frac{5}{3}\sin\alpha=\sin\beta;$$

β étant supposé moindre que $\frac{\pi}{2}$, ce qui est permis.

La dérivée s'annule quand on a

$$2x-\alpha=\beta \quad \text{ou} \quad 2x-\alpha=\pi-\beta,$$

c'est-à-dire pour les valeurs

$$x=\frac{\beta+\alpha}{2}, \quad x=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

β étant $< \frac{\pi}{2}$, la première de ces valeurs est plus petite que la deuxième, et toutes les deux sont comprises entre α et π. Or $x = \alpha + \varepsilon$ donne pour la fonction un résultat positif et $x = \pi - \varepsilon$ un résultat négatif, ε étant une quantité positive suffisamment petite (*). Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait trois racines est que le minimum correspondant à $\frac{\beta+\alpha}{2}$ soit négatif, et que le maximum correspondant à $\frac{\pi}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}$ soit positif. On trouve ainsi les conditions

$$h < \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}}, \qquad h > \frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Ces conditions sont compatibles, car les valeurs

$$lh + 4l\sin\frac{\beta+\alpha}{2} - l\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

et

$$lh + 4l\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - l\cos\frac{\beta+\alpha}{2}$$

étant un minimum et un maximum consécutifs, la seconde est supérieure à la première. On tire de là

$$lh + 4l\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - l\cos\frac{\beta+\alpha}{2}$$
$$> lh + 4l\sin\frac{\beta+\alpha}{2} - l\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

(*) On doit observer que la fonction φ, quoique discontinue puisqu'elle devient infinie pour $x = 0, \alpha, \pi$, peut être traitée ici comme une fonction continue, parce qu'on ne fait varier x que de α à π, intervalle dans lequel la fonction ne devient pas infinie.

d'où

$$\frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}}.$$

Sous les conditions précédentes, l'équation aura quatre racines réelles comprises entre o et 2π.

Le raisonnement ne serait plus applicable si les deux racines de la dérivée devenaient égales ou si l'on avait

$$\frac{\beta+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2},$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Dans ce cas, la dérivée a la racine double $\frac{\beta+\alpha}{2}$ ou $\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$; et si cette racine annule aussi la fonction

$$lh + 4l\sin x - l\sin(x-\alpha),$$

elle sera une racine triple de l'équation proposée.

On peut alors présenter les différents cas de la question dans le résumé suivant :

Premier cas. $\alpha <$ l'angle aigu ayant pour sinus $\frac{3}{5}$ ou $36^\circ 52' 11'',6$:

$$h < \frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}},\quad \text{2 racines distinctes;}$$

$$h = \frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}},\quad 4 \text{ racines dont 2 égales;}$$

$$\left.\begin{array}{l} h > \dfrac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}}, \\[2ex] h < \dfrac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}}, \end{array}\right\} 4 \text{ racines distinctes;}$$

$$h = \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}},\quad 4 \text{ racines dont 2 égales;}$$

$$h > \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}},\quad 2 \text{ racines distinctes.}$$

Deuxième cas. $\alpha = 36^\circ\, 52'\, 11'', 6$:

$$h < \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)},\quad 2 \text{ racines distinctes;}$$

$$h = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)},\quad 4 \text{ racines dont 3 égales;}$$

$$h > \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)},\quad 2 \text{ racines distinctes.}$$

Troisième cas. $\alpha > 36^\circ 52' 11'',6$:

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{2 racines réelles distinctes.}$$

Remarque. — La méthode que je viens d'employer est applicable dans beaucoup de cas ; elle permettra de discuter les équations

$$h \sin^m x = \sin(x - \alpha),$$
$$h \operatorname{tang}^m x = \operatorname{tang}(x - \alpha),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$