Nouvelles annales de mathématiques

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 469-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__469_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 735

(voir 2e série, t. IV, p. 144);

PAR M. ARTHUR POUSSART,
Élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin).

Le lieu des centres des coniques tangentes aux côtés d'un triangle et telles, que les normales menées par les points de contact se rencontrent en un même point, est une courbe du troisième degré qui passe par les sommets du triangle, le point de rencontre des hauteurs, le centre de gravité, les centres des cercles inscrit et ex-inscrits, les milieux des côtés, les milieux des hauteurs. (THOMSON.)

Si $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sont les équations des côtés du triangle; α, β, γ les points de contact, l'équation générale des coniques inscrites est

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 - 2bcYZ - 2acXZ - 2abXY = 0,$$

a, b, c étant des constantes indéterminées.

Soient les équations de trois droites parallèles aux hauteurs du triangle

$$(\mathrm{H}a) \qquad Y\cos B = Z\cos C + K_1,$$

$$(\mathrm{H}b) \qquad Z\cos C = X\cos A + K_2,$$

$$(\mathrm{H}c) \qquad X\cos A = Y\cos B + K.$$

La condition pour que ces trois droites soient concourantes est

$$K + K_1 + K_2 = 0.$$

J'exprime que la Ha perpendiculaire au côté ayant pour équation $Z = 0$ passe par le point γ dont les coordonnées sont définies par les relations

$$\gamma \left\{ \begin{aligned} Z &= 0, \\ aX &= bY, \\ X \sin A + Y \sin B &= \frac{S}{R}, \end{aligned} \right. \qquad \text{ou} \qquad \gamma \left\{ \begin{aligned} Z &= 0, \\ Y &= \frac{S}{R} \frac{a}{b \sin A + a \sin B}, \\ X &= \frac{S}{R} \frac{b}{b \sin A + a \sin B}, \end{aligned} \right.$$

A, B, C étant les angles du triangle, S sa surface, R le rayon du cercle circonscrit.

Les coordonnées du point γ doivent vérifier l'équation de Ha; on a, en remplaçant,

$$K = \frac{S}{R} \cdot \frac{b \cos A - a \cos B}{b \sin A + a \sin B};$$

de même,

$$K_1 = \frac{S}{R} \cdot \frac{c \sin B - b \sin C}{c \cos B + b \cos C},$$

$$K_2 = \frac{S}{R} \cdot \frac{a \cos C - c \cos A}{a \sin C + c \sin A}.$$

Mais

$$K + K_1 + K_2 = 0,$$

donc

$$(1) \quad \frac{b \cos A - a \cos B}{b \sin A + a \sin B} + \frac{c \cos B - b \cos C}{c \sin B + b \sin C} + \frac{a \cos C - c \cos A}{a \sin C + c \sin A} = 0.$$

J'ai ainsi la condition pour que les normales passent par un même point.

$F(X, Y, Z) = 0$ étant l'équation de la courbe, le centre est défini par les équations

$$\frac{F'x}{\sin A} = \frac{F'y}{\sin B} = \frac{F'z}{\sin C},$$

ou ici

$$a\,\frac{aX - cZ - bY}{\sin A} = b\,\frac{bY - cZ - aX}{\sin B} = c\,\frac{cZ - aX - bY}{\sin C} = \lambda,$$

ce qui peut s'écrire :

$$(2)\qquad aX - cZ - bY = \frac{\lambda \sin A}{a},$$

$$(3)\qquad bY - cZ - aX = \frac{\lambda \sin B}{b},$$

$$(4)\qquad cZ - aX - bY = \frac{\lambda \sin C}{c}.$$

J'obtiens, en ajoutant les équations (2) et (3),

$$-2cZ = \lambda\left(\frac{\sin A}{a} + \frac{\sin B}{b}\right)$$

ou

$$(2)\ bis\qquad -2abcZ = \lambda(b \sin A + a \sin B).$$

J'aurai de même, en ajoutant (2) et (4), (3) et (4) :

$$(3)\ bis\qquad -2abcY = \lambda(a \sin C + c \sin A),$$

$$(4)\ bis\qquad -2abcX = \lambda(b \sin C + c \sin B).$$

Des équations (2) *bis*, (3) *bis*, (4) *bis* je tire

$$\frac{b \sin C + c \sin B}{X} = \frac{a \sin C + c \sin A}{Y} = \frac{b \sin A + a \sin B}{Z} = \mu.$$

Je remplace dans l'équation (1) $b \sin C + c \sin B$, etc., par les quantités proportionnelles X, Y, Z, et j'ai

$$(1)\ bis\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{b \cos A - a \cos B}{Z} + \frac{a \cos C - c \cos A}{Y} \\ &\quad + \frac{c \cos B - b \cos C}{X} = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'équation du lieu, il faut éliminer μ, a, b, c

entre les équations (1) *bis*, (2) *bis*, (3) *bis*, (4) *bis*, ou

$$
\begin{aligned}
&a\mathrm{X}(\mathrm{Z}\cos\mathrm{C}-\mathrm{Y}\cos\mathrm{B})+b\mathrm{Y}(\mathrm{X}\cos\mathrm{A}-\mathrm{Z}\cos\mathrm{C})+c\mathrm{Z}(\mathrm{Y}\cos\mathrm{B}-\mathrm{X}\cos\mathrm{A})=0,\\
&\qquad b\sin\mathrm{C} \qquad\qquad\qquad\qquad +c\sin\mathrm{B}-\mu\mathrm{X}=0,\\
&a\sin\mathrm{C} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +c\sin\mathrm{A}-\mu\mathrm{Y}=0,\\
&a\sin\mathrm{B}+b\sin\mathrm{A} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\mu\mathrm{Z}=0.
\end{aligned}
$$

Le résultat de l'élimination est

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{vmatrix}
\mathrm{X}(\mathrm{Z}\cos\mathrm{C}-\mathrm{Y}\cos\mathrm{B}) & \mathrm{Y}(\mathrm{X}\cos\mathrm{A}-2\cos\mathrm{C}) & \mathrm{Z}(\mathrm{Y}\cos\mathrm{B}-\mathrm{X}\cos\mathrm{A}) & 0\\
0 & \sin\mathrm{C} & \sin\mathrm{B} & \mathrm{X}\\
\sin\mathrm{C} & 0 & \sin\mathrm{A} & \mathrm{Y}\\
\sin\mathrm{B} & \sin\mathrm{A} & 0 & \mathrm{Z}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Le lieu est donc une courbe du troisième degré, et sous cette forme on vérifie immédiatement qu'elle passe par :

1° Les sommets du triangle qui ont pour coordonnées

$$
\mathrm{A}\begin{cases}\mathrm{X}=\dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}\sin\mathrm{A}},\\ \mathrm{Y}=0,\\ \mathrm{Z}=0,\end{cases}\qquad
\mathrm{B}\begin{cases}\mathrm{X}=0,\\ \mathrm{Y}=\dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}\sin\mathrm{B}},\\ \mathrm{Z}=0,\end{cases}\qquad
\mathrm{C}\begin{cases}\mathrm{X}=0,\\ \mathrm{Y}=0,\\ \mathrm{Z}=\dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}\sin\mathrm{C}}.\end{cases}
$$

2° Le point de concours des hauteurs défini par les relations

$$\mathrm{X}\cos\mathrm{A}=\mathrm{Y}\cos\mathrm{B}=\mathrm{Z}\cos\mathrm{C}.$$

L'équation (I) développée est

$$
(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned}
&+\sin\mathrm{A}.\mathrm{X}(\mathrm{Z}\cos\mathrm{C}-\mathrm{Y}\cos\mathrm{B})(\mathrm{X}\sin\mathrm{B}+\mathrm{Z}\sin\mathrm{C}-\mathrm{X}\sin\mathrm{A})\\
&+\sin\mathrm{B}.\mathrm{Y}(\mathrm{X}\cos\mathrm{A}-\mathrm{Z}\cos\mathrm{C})(\mathrm{X}\sin\mathrm{A}-\mathrm{Y}\sin\mathrm{B}+\mathrm{Z}\sin\mathrm{C})\\
&+\sin\mathrm{C}.\mathrm{Z}(\mathrm{Y}\cos\mathrm{B}-\mathrm{X}\cos\mathrm{A})(\mathrm{X}\sin\mathrm{A}+\mathrm{Y}\sin\mathrm{B}-\mathrm{Z}\sin\mathrm{C})
\end{aligned}\right\}=0.
$$

On peut encore la mettre sous la forme

$$
(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{XZ}(\mathrm{Z}\sin\mathrm{C}-\mathrm{X}\sin\mathrm{A})\sin\mathrm{B}+\mathrm{XY}(\mathrm{X}\sin\mathrm{A}-\mathrm{Y}\sin\mathrm{B})\sin\mathrm{C}\\
&\quad+\mathrm{YZ}(\mathrm{Y}\sin\mathrm{B}-\mathrm{Z}\sin\mathrm{C})\sin\mathrm{A}=0.
\end{aligned}\right.
$$

On vérifie alors facilement que la courbe passe par :

3° Le centre de gravité défini par les égalités

$$X \sin A = Y \sin B = Z \sin C.$$

4° Le centre du cercle inscrit défini par les égalités

$$X = Y = Z.$$

5° Les centres des cercles ex-inscrits qui ont pour coordonnées

$$\left\{\begin{array}{l} X+Y=0, \\ Y+Z=0, \\ X-Z=0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} X+Z=0, \\ Y+Z=0, \\ X-Y=0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} X+Z=0, \\ X+Y=0, \\ Y-Z=0. \end{array}\right.$$

6° Les milieux des côtés définis par les relations

$$\left\{\begin{array}{c} X=0, \\ Y \sin B = Z \sin C, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} Y=0, \\ X \sin A = Z \sin C, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} Z=0, \\ X \sin A = Y \sin B. \end{array}\right.$$

7° Les milieux des hauteurs dont les coordonnées sont

$$\left\{\begin{array}{l} Y = \dfrac{S}{2R}\dfrac{\cos A}{\sin C}, \\ X = \dfrac{S}{2R}\dfrac{\cos B}{\sin C}, \\ Z = \dfrac{S}{2R}\dfrac{1}{\sin C}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} Y = \dfrac{S}{2R}\dfrac{1}{\sin B}, \\ X = \dfrac{S}{2R}\dfrac{\cos C}{\sin B}, \\ Z = \dfrac{S}{2R}\dfrac{\cos A}{\sin B}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} Y = \dfrac{S}{2R}\dfrac{\cos C}{\sin A}, \\ X = \dfrac{S}{2R}\dfrac{1}{\sin A}, \\ Z = \dfrac{S}{2R}\dfrac{\cos B}{\sin A}. \end{array}\right.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Camille Massing, élève de Sainte-Barbe (cours de M. Tarbourieh); Ed. Widmann, de Strasbourg; C. Benoist, élève du Prytanée militaire; Recoq, élève du lycée de Montpellier; Lacauchie, élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard); Bauquenne, candidat à l'École Normale.

Question 734;

PAR MM. DORBECOURT ET BAILLET,
Élèves de la classe de M. Bouquet, au lycée Louis-le-Grand.

Trouver la condition pour qu'une asymptote d'une conique donnée par l'équation générale du second degré passe à l'origine. (SALMON.)

L'équation qui donne les deux asymptotes d'une hyperbole est

$$(2Cy + Bx + E)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 = 0,$$

dans laquelle M représente $B^2 - 4AC$ et N le binôme $BE - 2CD$, l'équation de la conique étant

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

(*Géométrie analytique* de MM. BRIOT et BOUQUET.)

Pour que l'une quelconque des asymptotes passe par l'origine, il faut et il suffit que son terme constant soit nul, ce qui donne

$$E \pm \frac{N}{\sqrt{M}} = 0.$$

Élevant au carré et remplaçant M et N par leurs valeurs indiquées plus haut, on arrive à la condition

$$AE^2 + CD^2 - BDE = 0.$$

Question 734;

PAR M. FOULON,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Trouver la condition pour qu'une asymptote à une *conique donnée par l'équation générale du second degré passe par l'origine.*

Lorsque la conique est rapportée à son centre, les asymptotes sont données par l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

Soient a, b les coordonnées du centre; l'équation qui donne les asymptotes devient

$$A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 = 0.$$

Pour que l'une des asymptotes passe par l'origine, il faut et il suffit que le terme constant soit nul dans cette dernière équation, c'est-à-dire que

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = 0.$$

Or,

$$a = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

En substituant ces valeurs de a et b, on trouve, toute réduction faite, la condition

$$(B^2 - 4AC)(BDE - CD^2 - AE^2) = 0.$$

Note.— Des solutions peu differentes nous ont ete adressees par MM. H. Violland, etudiant a Strasbourg; C. Massing, eleve de l'institution Sainte-Barbe; Pilloy, repetiteur au lycee d'Amiens; Bauquenne, candidat a l'Ecole Normale; Niebylowski, elève du lycee Bonaparte; Jules Hatte, eleve du lycee Charlemagne.

M. E. Brunelet de Bapaume a résolu la même question pour une surface du second ordre et son cône asymptote, et il est parvenu a cette conclusion que le *discriminant* est proportionnel a l'*invariant;* leur rapport est le terme constant de l'equation du second degre.

Question d'examen;

Par M. GAY,
Élève du lycée d'Angoulême (classe de M. Dupain).

Étant donnés un cercle O (*), *un diamètre* AB *et une droite* MN, *on propose de tracer une corde parallèle à la droite donnée et divisée par le diamètre en deux segments qui soient entre eux dans le même rapport que deux lignes* m, n.

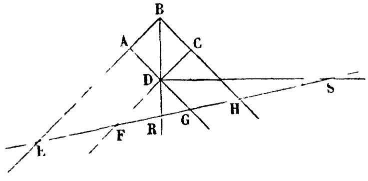
Construction. — Je prolonge le diamètre jusqu'à ce qu'il rencontre en K la droite donnée (ou une parallèle à cette droite). Je prends sur cette droite $KI = m$, et en sens inverse $KF = n$; sur le milieu de IF j'élève une perpendiculaire qui coupe en H le prolongement du diamètre; je trace HI, HF, enfin je mène les rayons OD, OE parallèles à HI, HF; la corde qui joint les extrémités de ces rayons répond à la question, comme il est très-aisé de le vérifier.

Question d'examen;

Par MM. GAY et DAIGUEPLATS,
Élèves du lycée d'Angoulême (classe de M. Dupain).

Construire un carré ABCD dont les côtés prolongés

Fig. 1.



(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

coupent une droite donnée en quatre points donnés E, F, G, H (E sur BA, F sur CD, G sur AD, H sur BC).

Soit x le côté du carré,

$$FD = y, \quad DG = z, \quad EF = a, \quad FG = b, \quad GH = c;$$

le triangle EAG, coupé par FD, donne

$$(1) \qquad \frac{x}{x+z} = \frac{a}{a+b} \quad \text{ou} \quad bx = az;$$

le triangle FCH, coupé par DG, donne

$$(2) \qquad \frac{x}{x+y} = \frac{c}{b+c} \quad \text{ou} \quad bx = cy;$$

enfin, dans le triangle rectangle FDG, on a :

$$(3) \qquad y^2 + z^2 = b^2.$$

De ces trois équations on tire

$$x = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}, \quad y = \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}}, \quad z = \frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

valeurs aisées à construire.

Autrement. — La diagonale BD coupe la droite donnée en un point R, et la perpendiculaire menée à cette diagonale par le point D coupe la droite donnée en S; les lignes DR, DS sont des bissectrices du triangle FDG, l'une intérieure, l'autre extérieure : on a donc

$$\frac{FR}{GR} = \frac{FS}{GS} = \frac{FD}{GD}.$$

Or, des équations (1) et (2) on tire

$$\frac{FD}{GD} = \frac{a}{c};$$

d'ailleurs,

$$FR + GR = b, \quad FS - GS = b,$$

donc

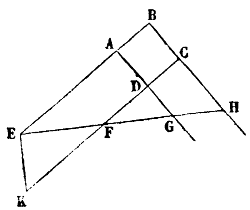
$$FR = \frac{ab}{a+c}, \quad FS = \frac{ab}{a-c}.$$

Les points R et S s'obtiennent donc par des quatrièmes proportionnelles, et le point D appartient à six lieux géométriques dont deux suffisent pour le construire, les quatre autres servant de vérification. Ces lieux sont : 1° et 2° les circonférences ayant pour diamètres FG, RS; 3°, 4° et 5° les segments capables de l'angle de 45 degrés construits sur FR, RG, GS; 6° le segment capable de 135 degrés construit sur FS.

Note de M. Dupain. — Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les deux constructions suivantes :

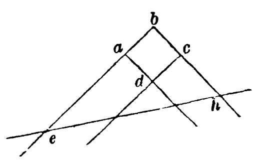
1° Au point E j'élève sur la droite donnée la perpen-

Fig 2.



diculaire EK égale à GH; je trace la ligne indéfinie KF à laquelle je mène une parallèle par le point E et des perpendiculaires par les points G et H.

Fig. 3.



2° Je construis un carré *abcd*; je prends sur le prolongement de bc un point h tel que $\frac{bh}{ch} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{FH}}$, et sur le prolongement de ba un point e tel que $\frac{be}{ae} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{EG}}$. Je joins eh et j'obtiens une figure semblable à la proposée qu'il ne s'agit plus que d'amplifier ou de réduire dans le rapport de EH à eh.