NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

Étude des points à l'infini dans les surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 49-62
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__49_0>

ÉTUDE DES POINTS A L'INFINI DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. PAINVIN,
Professeur au lycée de Douai.

Cette recherche servira d'intermédiaire entre l'étude que j'ai donnée précédemment des points à l'infini dans les courbes et celle des points à l'infini dans les surfaces que je donnerai prochainement (*).

En adoptant les coordonnées homogènes $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, l'équation générale des surfaces du second ordre sera de la forme

$$(\mathrm{I})\,(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy \\ &+ 2t(\mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z) + \mathrm{D}t^2 = f(x, y, z, t) = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'équation du plan à l'infini sera

$$t = 0.$$

Les points où la surface S est rencontrée par le plan à l'infini sont donnés par les équations

$$(\mathrm{II})\,(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} &t = 0, \\ &\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy \\ &= \varphi(x, y, z) = 0. \end{aligned}\right.$$

La seconde équation représente un cône ayant pour sommet l'origine : je l'appellerai *cône des directions asymptotiques*.

(*) Les principaux résultats de cette dernière etude ont été présentes à l'Académie des Sciences en octobre 1864 (*Comptes rendus*, 2e semestre, 1864, p. 666).

Soit une génératrice de ce cône

$$(G)\qquad \begin{cases} x = mz, \\ y = nz; \end{cases}$$

on a la condition

$$\varphi(m, n, 1) = 0;$$

cette génératrice détermine le point à l'infini

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} t = 0, \\ x = mz, \\ y = nz. \end{cases}$$

Étudions l'intersection de la surface par une droite quelconque passant par le point I; les équations d'une telle droite seront

$$(1)\qquad \begin{cases} x = mz + \lambda t, \\ y = nz + \mu t. \end{cases}$$

En remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation de la surface, on trouve

$$\begin{gathered} z^2\varphi(m, n, 1) \\ + zt[\lambda\varphi'_x(m, n, 1) + \mu\varphi'_y(m, n, 1) + 2(\mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}'')] \\ + \mathrm{K}t^2 = 0; \end{gathered}$$

cette équation, qui donne les intersections de la droite (1) avec la surface, se réduit à

$$\begin{gathered} zt[\lambda\varphi'_x(m, n, 1) + \mu\varphi'_y(m, n, 1) + 2(\mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}'')] \\ + \mathrm{K}t^2 = 0. \end{gathered}$$

Pour que la droite (1) soit tangente à la surface, il faut que le premier membre de l'équation précédente soit divisible par t^2; de là la condition

$$(2)\qquad \lambda\varphi'_x(m, n, 1) + \mu\varphi'_y(m, n, 1) + 2(\mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}'') = 0.$$

Pour obtenir le lieu de toutes les droites (évidemment parallèles) passant par le point I et tangentes à la surface, il faut éliminer λ et μ entre les équations (1) et (2). Effectuons cette élimination, et remarquons que l'identité

$$x\varphi'_x(x,y,z)+y\varphi'_y(x,y,z)+z\varphi'_z(x,y,z)=2\varphi(x,y,z)$$

nous donne, en y faisant $x=m$, $y=n$, $z=1$, et en ayant égard à l'équation de condition $\varphi(m,n,1)=0$,

$$m\varphi'_x(m,n,1)+n\varphi'_y(m,n,1)+\varphi'_z(m,n,1)=0;$$

nous trouvons alors que le lieu des droites passant par le point I et tangentes à la surface, ou, ce qui revient au même, des droites parallèles à la direction asymptotique $(x=mz,\ y=nz)$ et tangentes à la surface, est donné par l'équation

$$(\text{III})(\text{T})\ \begin{cases} x\varphi'_x(m,n,1)+y\varphi'_y(m,n,1)+z\varphi'_z(m,n,1)\\ \qquad +2t(\text{C}m+\text{C}'n+\text{C}'')=0,\end{cases}$$

avec la condition

$$\varphi(m,n,1)=0.$$

Cette équation représente un plan que nous appellerons *plan asymptote* de la surface *correspondant à la direction asymptotique* (G).

Ce plan est évidemment parallèle au plan touchant le cône des directions asymptotiques

$$\varphi(x,y,z)=0$$

suivant la génératrice ou direction asymptotique $(x=mz,\ y=nz)$.

Remarque I. — Le plan asymptote correspondant à la direction asymptotique G est le plan tangent à l'infini au point correspondant à cette direction asymptotique. Car on constate facilement que l'équation du plan asymptote (T) se déduit de celle du plan tangent au point

(x_1, y_1, z_1, t_1)

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} + tf'_{t_1} = 0,$$

en supposant

$$x_1 = mz_1, \quad y_1 = nz_1, \quad t_1 = 0.$$

En effet, on a

$$(3) \quad f(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) + 2t(Cx + C'y + C''z) + Dt^2;$$

d'où

$$f'_{x_1} = \varphi'_x(x_1, y_1, z_1) = z_1\varphi'_x(m, n, 1),$$
$$f'_{y_1} = \varphi'_y(x_1, y_1, z_1) = z_1\varphi'_y(m, n, 1),$$
$$f'_{z_1} = \varphi'_z(x_1, y_1, z_1) = z_1\varphi'_z(m, n, 1),$$
$$f'_{t_1} = 2(Cx_1 + C'y_1 + C''z_1) = 2z_1(Cm + C'n + C'');$$

en opérant la substitution de ces valeurs, l'équation du plan tangent devient

$$x\varphi'_x(m, n, 1) + y\varphi'_y(m, n, 1) + z\varphi'_z(m, n, 1)$$
$$+ 2t(Cm + C'n + C'') = 0;$$

c'est l'équation du plan (T).

Remarque II. — Le plan asymptote est aussi le plan diamétral conjugué de la direction $(x = mz, y = nz)$.

En effet, d'après l'identité (3), l'équation du plan (T) peut s'écrire

$$mf'_x + nf'_y + f'_z = 0.$$

Mais ici, il résulte de la remarque générale déjà faite que le plan diamétral est parallèle aux cordes qui lui sont conjuguées; d'ailleurs, on a évidemment

$$m\varphi'_x(m, n, 1) + n\varphi'_y(m, n, 1) + \varphi'_z(m, n, 1) = 2\varphi(m, n, 1) = 0,$$

ce qui démontre le parallélisme indiqué.

DISCUSSION.

1° LE CÔNE DES DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES EST UN

CÔNE PROPREMENT DIT, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (C) ou (II) est la somme algébrique de trois carrés; ce cas correspond à celui où la surface a un *centre unique* (*genre ellipsoïde, genre hyperboloïde*).

On peut alors faire disparaître les trois termes du premier degré et supposer l'équation de la surface ramenée à la forme

$$(4)\,(\mathrm{S})\quad \mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'xz+2\mathrm{B}''xy=\mathrm{H}t^2.$$

Le cône des directions asymptotiques sera

$$(5)\,(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'xz+2\mathrm{B}''xy\\ &\qquad=\varphi(x,y,z)=0;\end{aligned}\right.$$

une droite quelconque parallèle à une génératrice du cône des directions asymptotiques rencontre la surface en UN *point à l'infini.*

Le plan asymptote correspondant à la direction asymptotique ($x=mz$, $y=nz$) aura pour équation

$$x\varphi'_x(m,n,1)+y\varphi'_y(m,n,1)+z\varphi'_z(m,n,1)=0.$$

On voit que les plans asymptotes enveloppent le cône (C); ce cône est appelé *cône asymptote*; son sommet est l'origine actuelle ou le centre de la surface.

Ainsi, *dans les surfaces à centre unique, les plans asymptotes ou plans tangents à l'infini touchent un cône, parallèle au cône des directions asymptotiques, qu'on nomme* CÔNE ASYMPTOTE; *le sommet du cône asymptote est le centre de la surface.*

Un plan tangent à une surface du second ordre coupe la surface suivant deux droites réelles ou imaginaires dont le point de concours est le point de contact. (Ceci résulte de la propriété générale des plans tangents : le point de contact est un point double de la section faite par le plan tangent.) Donc, *un plan asymptote ou tangent à l'infini coupe la surface suivant deux droites réelles ou imaginaires* PARALLÈLES *à la génératrice de contact de ce plan avec le cône asymptote.*

Remarque I. — Le cône asymptote est circonscrit à la surface, le plan de la courbe de contact est le plan à l'infini.

Ceci résulte évidemment des équations (4) et (5), car l'équation (4) est l'équation d'une surface circonscrite au cône (C) suivant la courbe située dans le plan $t = 0$.

On conclut de là, en reprenant l'équation générale (I) des surfaces du second ordre, que l'équation du cône asymptote est de la forme

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ &\quad + 2t(Cx + C'y + C''z) + D_1 t^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

On déterminera D_1 en exprimant que cette dernière équation représente un cône.

Remarque II. — Si le cône des directions asymptotiques est imaginaire, la surface n'a pas de points réels à l'infini ; c'est le cas de *l'ellipsoïde* ou de ses variétés.

Si ce cône est réel, la surface a des nappes infinies ; c'est le cas des *hyperboloïdes*.

II° LE CÔNE DES DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES SE RÉDUIT A DEUX PLANS DISTINCTS, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (II) est la somme algébrique de deux carrés ; ce cas correspond à celui où le centre est à l'infini sur une direction déterminée, ou bien à celui où il y a une infinité de centres en ligne droite (*paraboloïde elliptique ou hyperbolique, cylindre elliptique ou hyperbolique*).

Supposons donc que la fonction $\varphi(x, y, z)$ soit de la forme

$$(6)\quad \varphi(x, y, z) = (Mx + Ny + Pz)(M_1x + N_1y + P_1z) = D.D_1;$$

l'intersection de la surface par le plan à l'infini se compose des deux droites distinctes

$$\Delta \left\{ \begin{aligned} D = Mx + Ny + Pz &= 0, \\ t &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$\Delta \left\{ \begin{aligned} D_1 = M_1x + N_1y + P_1z &= 0, \\ t &= 0; \end{aligned} \right.$$

les directions asymptotiques sont parallèles à l'un ou à l'autre des deux plans (D) et (D_1) ; ces deux plans portent le nom de *plans directeurs*.

Ainsi, *une droite quelconque parallèle à l'un ou à l'autre des plans directeurs rencontre la surface en* UN *point à l'infini.*

Considérons une direction asymptotique

$$\left\{ \begin{aligned} x &= mz, \\ y &= nz \end{aligned} \right.$$

parallèle au plan (D), par exemple, de sorte que

$$(7)\qquad Mm + Nn + P = 0;$$

le plan asymptote correspondant au point à l'infini

$$(x = mz, \quad y = nz, \quad t = 0)$$

aura pour équation, d'après (III) et (6),

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(M_1m + N_1n + P_1)(Mx + Ny + Pz) \\ &\quad + 2t(Cm + C'n + C'') = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous distinguerons deux cas :

1^er^ CAS. — On ne peut pas, dans l'hypothèse actuelle, faire disparaître les trois termes du premier degré : c'est le cas des *paraboloïdes*.

Alors le plan asymptote (8) est parallèle au plan directeur (D); on peut, en outre, disposer des arbitraires m et n, assujetties à vérifier l'unique relation (7), de manière que l'équation (8) représente un plan quelconque parallèle au plan (D). On raisonnerait de même à l'égard du plan (D_1). Ainsi :

Dans les PARABOLOÏDES, *les directions asymptotiques sont des droites quelconques parallèles à l'un ou à l'autre des plans directeurs, et tout plan parallèle à un plan directeur est un plan asymptote, c'est-à-dire touche la surface à l'infini. Les plans asymptotes parallèles au plan directeur* (D) *passent par la droite à l'infini* Δ, *et le point de contact est un point de cette droite; d'ailleurs, le point de contact varie de position lorsque le plan asymptote se déplace parallèlement à lui-même. Les plans asymptotes parallèles au plan directeur* (D_1) *passent par la droite à l'infini* (Δ_1).

Remarque I. — Il y a une direction asymptotique, et une seule, pour laquelle le plan asymptote ou le plan tangent est le plan à l'infini; cette direction est donnée par l'intersection des deux plans directeurs

$$(\mathrm{D}) \qquad Mx + Ny + Pz = 0,$$
$$(\mathrm{D}_1) \qquad M_1x + N_1y + P_1z = 0.$$

L'équation (8) du plan asymptote se réduit alors à

$$t = 0;$$

c'est l'équation du plan à l'infini. Ainsi, au point à l'infini

$$\left\{\begin{aligned} Mx + Ny + Pz &= 0,\\ M_1x + N_1y + P_1z &= 0,\\ t &= 0,\end{aligned}\right.$$

le plan tangent est le plan à l'infini; donc :

Les paraboloïdes touchent le plan à l'infini et le touchent en un point unique.

Remarque II. — Lorsque les plans directeurs (D) et (D_1) sont imaginaires (c'est le cas du paraboloïde elliptique), la surface n'a pas de point réel à l'infini, excepté celui qui se trouve à l'intersection des deux plans directeurs, intersection toujours réelle. Ainsi :

Dans le paraboloïde elliptique, il n'y a de direction asymptotique réelle que la droite parallèle à l'intersection des plans directeurs, et le plan asymptote correspondant est le plan à l'infini.

2ᵉ CAS. — On peut faire disparaître les trois termes du premier degré : c'est le cas des cylindres elliptique et hyperbolique.

L'équation de la surface pouvant être ramenée à la forme

$$(9)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = Ht^2,$$

l'équation du cône des directions asymptotiques sera encore

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + 2B'xz + 2B''xy$$
$$= (Mx + Ny + Pz)(M_1x + N_1y + P_1z) = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (8) du plan asymptote devient

$$(M_1m + N_1n + P_1)(Mx + Ny + Pz) = 0$$

ou

$$Mx + Ny + Pz = 0.$$

Donc, *dans les cylindres elliptique et hyperbolique, tous les plans tangents à l'infini se confondent avec les plans menés par la ligne des centres parallèlement aux plans directeurs; ces* DEUX *plans touchent respectivement la surface tout le long des droites à l'infini* (Δ)

ou (Δ_1); *on peut les appeler* PLANS ASYMPTOTES *du cylindre.*

Un plan asymptote coupe la surface suivant deux droites confondues avec la droite à l'infini située dans ce plan; tout plan parallèle, devant passer par cette droite à l'infini, ne coupera la surface que suivant *une seule droite* à distance finie. L'ensemble des deux plans asymptotes forme un système *circonscrit* à la surface, le plan de la courbe de contact est le plan à l'infini.

Remarque I. — Si nous considérons le point particulier à l'infini situé sur une droite parallèle à l'intersection des deux plans directeurs, savoir :

$$(\mathrm{J}) \qquad \begin{cases} \mathrm{M}x + \mathrm{N}y + \mathrm{P}z = 0, \\ \mathrm{M}_1x + \mathrm{N}_1y + \mathrm{P}_1z = 0, \\ t = 0, \end{cases}$$

l'équation (8) se réduit à une identité.

Le point J est, en effet, un *point double* de la surface; car une droite quelconque passant par ce point, par exemple,

$$\begin{cases} \mathrm{M}x + \mathrm{N}y + \mathrm{P}z = \lambda t, \\ \mathrm{M}_1x + \mathrm{N}_1y + \mathrm{P}_1z = \mu t, \end{cases}$$

rencontre la surface (9) en deux points coïncidents, puisque l'équation se réduit à $(\lambda\mu - \mathrm{H})\,t^2 = 0$; ainsi :

Dans les cylindres elliptique ou hyperbolique, le point à l'infini situé sur la ligne des centres est un point double; les tangentes en ce point double sont les génératrices du cylindre.

Remarque II. — Les deux *plans asymptotes* sont imaginaires dans le cylindre elliptique, réels dans le cylindre hyperbolique.

Le cylindre elliptique ne possède, comme point réel à l'infini, que le point double J.

III° LE CÔNE DES DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES SE RÉDUIT A DEUX PLANS QUI SE CONFONDENT, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (II) se réduit à un carré parfait; ce cas correspond à celui où le centre est à l'infini sur un plan de direction déterminée, ou bien à celui où il y a une infinité de centres dans un plan (*cylindre parabolique, deux plans parallèles*).

Supposons donc que la fonction $\varphi(x, y, z)$ soit de la forme

$$(10) \qquad \varphi(x, y, z) = (Mx + Ny + Pz)^2 = D^2;$$

l'intersection de la surface par le plan à l'infini se compose de deux droites confondues avec la droite

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} D = Mx + Ny + Pz = 0, \\ t = 0; \end{cases}$$

toutes les directions asymptotiques sont parallèles au plan (D).

1er CAS. — On ne peut pas faire disparaître les trois termes du premier degré (c'est le cas du *cylindre parabolique*).

Le plan asymptote correspondant à une direction asymptotique quelconque a pour équation [(III) ou (8)]

$$t(Cm + C'n + C'') = 0, \quad \text{ou} \quad t = 0;$$

donc, *tous les plans asymptotes ou tangents à l'infini, dans le cylindre parabolique, se confondent avec le plan à l'infini parallèle au plan directeur* (D).

On voit que la surface touche le plan à l'infini suivant la droite (Δ), car, pour $t = 0$, on a

$$(Mx + Ny + Pz)^2 = 0;$$

donc, *un cylindre parabolique touche le plan à l'infini suivant une droite.*

Un plan quelconque, parallèle au plan (D), passera par la droite (Δ), et, par suite, ne rencontrera la surface qu'en *une seule droite* à distance finie.

Nous avons remarqué que les plans asymptotes sont des plans diamétraux conjugués de la direction asymptotique correspondante; donc, *tous les plans diamétraux conjugués des cordes parallèles au plan* (D) *sont à l'infini.*

Remarque. — Nous pouvons encore présenter ainsi ces résultats : Dans le *cylindre parabolique,* une droite quelconque parallèle aux plans diamétraux rencontre la surface en un point à l'infini et en un point à distance finie; mais les droites, parallèles aux plans diamétraux et non parallèles aux génératrices du cylindre, et rencontrant en outre la surface en deux points à l'infini, sont *toutes* à l'infini; c'est-à-dire que les plans asymptotes, correspondant à une direction asymptotique quelconque, non parallèles aux génératrices du cylindre, se confondent *tous* avec le plan à l'infini.

Les droites parallèles aux génératrices du cylindre rencontrent la surface en deux points à l'infini; le point à l'infini sur la direction des génératrices est en effet un *point double* de la surface, et les tangentes proprement dites à la surface en ce point sont précisément les génératrices du cylindre.

2[e] CAS. — On peut faire disparaître les trois termes du premier degré (c'est le cas de deux plans parallèles).

L'équation de la surface peut être ramenée à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = Ht^2,$$

ou

$$(11) \qquad (Mx + Ny + Pz)^2 = Ht^2;$$

les directions asymptotiques sont toujours parallèles au plan

$$D = Mx + Ny + Pz = 0;$$

mais l'équation du plan asymptote

$$x\varphi'_x(m_1, n_1, 1) + y\varphi'_y(m_1, n_1, 1) + z\varphi'_z(m_1, n_1, 1) = 0$$

se réduit à une identité pour toutes les valeurs de m et n qui vérifient la relation

$$Mm + Nn + P = 0.$$

C'est qu'en effet la droite à l'infini (Δ) est une *droite double* de la surface.

Un plan quelconque passant par cette droite, c'est-à-dire parallèle au plan directeur (D), par exemple

$$Mx + Ny + Pz = \lambda t,$$

rencontre la surface suivant deux droites qui coïncident avec la droite (Δ), car l'équation (11) donne alors

$$(\lambda^2 - H)t^2 = 0.$$

Les plans tangents proprement dits suivant cette droite double sont les plans mêmes qui constituent la surface.

Toute droite parallèle au plan (D) rencontre la surface en deux points coïncidents sur la droite à l'infini (Δ).

On peut de cette discussion conclure la classification suivante.

I° *Les termes du second degré peuvent se ramener à la somme algébrique de trois carrés, c'est-à-dire donnent* UN CÔNE :

Cône imaginaire......	GENRE ELLIPSOÏDE;
Cône réel...........	GENRE HYPERBOLOÏDE.

II° *Les termes du second degré peuvent se ramener à* *la somme algébrique de deux carrés, c'est-à-dire donnent* DEUX PLANS *qui se coupent :*

1° Pas de centre....	*Plans imaginaires..*	PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.
	Plans réels.......	PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.
2° Infinité de centres.	*Plans imaginaires..*	CYLINDRE ELLIPTIQUE.
	Plans réels.... ..	CYLINDRE HYPERBOLIQUE.

III° *Les termes du second degré forment un carré parfait, c'est-à-dire donnent* DEUX PLANS CONFONDUS :

1° Pas de centre........ CYLINDRE PARABOLIQUE.

2° Infinité de centres.... DEUX PLANS PARALLÈLES.