NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MIRZA-NIZAM

Théorème sur les déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 500-504

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__500_1>

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. MIRZA-NIZAM.

M. Michael Roberts a énoncé dans les *Nouvelles Annales* (*voir* cahier de mars 1864, p. 139, question 694) un théorème sur un déterminant numérique, théorème qui a été démontré dans le cahier de septembre de la même année, p. 395 et 397, de deux façons différentes, par M. Smet-Jamar (du lycée Louis-le-Grand) et

MM. Cornu et Picquet (de l'institution Sainte-Barbe).
Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant :

Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

une fonction entière de degré n en x. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ *les n racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro cette fonction, et par* $f'(x)$ *la dérivée de cette fonction par rapport à* x; *on aura*

$$R = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & x \ldots & x \\ x & \alpha_2 & x \ldots & x \\ x & x & \alpha_3 \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & x \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} = f(x) - xf'(x).$$

Solution. — R s'écrit en effet

$$R = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -x & -x \ldots & -x \\ -x & -\alpha_2 & -x \ldots & -x \\ -x & -x & -\alpha_3 \ldots & -x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -x & -x & -x \ldots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Retranchons la dernière colonne de toutes les autres; on obtient

$$R = \begin{vmatrix} x-\alpha_1 & 0 & 0 \ldots & -x \\ 0 & x-\alpha_2 & 0 \ldots & -x \\ 0 & 0 & x-\alpha_3 \ldots & -x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -(x-\alpha_n) & -(x-\alpha_n) & -(x-\alpha_n) \ldots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Divisons la première colonne par $x - \alpha_1$, la deuxième par $x - \alpha_2, \ldots$, la $(n-1)^{ième}$ par $(x - \alpha_{n-1})$, la dernière par x, et divisons aussi la dernière ligne horizontale par

$(x - \alpha_n)$, on obtient

$$R = xf(x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & & -1 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & & -1 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{-1}{x - \alpha_1} & \dfrac{-1}{x - \alpha_2} & \dfrac{-1}{x - \alpha_3} \ldots & & \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - \alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Ajoutant successivement chacune des colonnes à la dernière, on obtient

$$R = xf(x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{-1}{x - \alpha_1} & \dfrac{-1}{x - \alpha_2} & \dfrac{-1}{x - \alpha_3} \ldots & & \dfrac{1}{x} - \sum_i \dfrac{1}{x - \alpha_i} \end{vmatrix}.$$

qui se réduit au produit des éléments de la diagonale

$$R = xf(x) \left(\frac{1}{x} - \sum_i \frac{1}{x - \alpha_i} \right),$$

i recevant toutes les valeurs de 1 à n. Or on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_i \frac{1}{x - \alpha_i};$$

donc

$$R = f(x) - xf'(x).$$

C. Q. F. D.

Cas particuliers. — On obtient le théorème de M. Michael Roberts en faisant $x = 1$ et remarquant que les quantités qui ont été désignées ici par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ont été désignées par M. Michael Roberts par $-\alpha_1$, $-\alpha_2$,

$-\alpha_3, \ldots, -\alpha_n$. On obtient une autre égalité en faisant $x = -1$.

Remplaçons x par l'une des racines simples α_i, on obtient

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_i & \alpha_i \ldots & \alpha_i \\ \alpha_i & \alpha_2 & \alpha_i \ldots & \alpha_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_i & \alpha_i & \alpha_i \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} = -\alpha_i f'(\alpha_i),$$

ou, en remarquant que tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne horizontale sont égaux à α_i, on a

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_i \ldots & & & \alpha_i \\ \alpha_i & \alpha_2 \ldots & & & \alpha_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_i & \alpha_i \ldots & \alpha_{i-1} \ldots & & \alpha_i \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ \alpha_i & \alpha_i \ldots & & \alpha_{i+1} \ldots & \alpha_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_i & \alpha_i \ldots & & & \alpha_n \end{vmatrix} = -f'(\alpha_i).$$

Soit maintenant β une racine de l'équation $f'(x) = 0$ ne vérifiant pas l'équation $f(x) = 0$. On aura

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta & \beta \ldots & \beta \\ \beta & \alpha_2 & \beta \ldots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha_3 \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta & \beta & \beta \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} = f(\beta).$$

De l'équation démontrée, on tire

$$f(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 \ldots & x \\ \ldots & \ldots \\ x \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} + x f'(x).$$

En décomposant semblablement $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{n-2}(x)$ et remplaçant, on obtient la formule

$$
\begin{aligned}
f(x) = (-1)^n & \begin{vmatrix} \alpha_1 & x \ldots & x \\ x & \alpha_2 \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} \beta_1 & x \ldots & x \\ x & \beta_1 \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x \ldots & \beta_{n-1} \end{vmatrix} x \\
& + (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} \gamma_1 & x \ldots & x \\ x & \gamma_2 \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x \ldots & \gamma_{n-2} \end{vmatrix} x^2 + \ldots \\
& + (-1)^{n-p} \begin{vmatrix} \pi_1 & x \ldots & x \\ x & \pi_2 \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x \ldots & \pi_{n-p} \end{vmatrix} x^p + \ldots \\
& + (-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & x \\ x & \lambda_2 \end{vmatrix} x^{n-2} + 1.2\ldots n(x-\mu)\,x^{n-i},
\end{aligned}
$$

où $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})$ sont les racines de $f'(x) = 0$, $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-2})$ celles de $f''(x) = 0$, (λ_1, λ_2) celles de $f^{n-2}(x) = 0$ et μ la racine de $f^{n-1}(x) = 0$.

On voit par là que $f(x)$ est développée suivant une somme de déterminants.