NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 76-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__76_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 398

(voir tome XVI, page 390) ;

PAR M. RAFAELE RUBINI.

Soient donnés un tétraèdre quelconque abcd et dans son intérieur un point o tel, que les droites oa, ob, oc déterminent un angle trirectangle; je prolonge les droites oa, ob, oc, od jusqu'en a', b', c', d' où elles coupent les faces opposées aux points a', b', c', d'. On a

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{oa}+\frac{1}{oa'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{ob}+\frac{1}{ob'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{oc}+\frac{1}{oc'}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{od}+\frac{1}{od'}\right)^2}.$$

(MANNHEIM.)

Prenons le point o pour origine et les droites oa, ob, oc, qui déterminent un angle trirectangle, pour direction des axes des x, des y et des z positifs. Posant

$$\frac{1}{oa}=m,\quad \frac{1}{ob}=n,\quad \frac{1}{oc}=p,$$

l'équation de la face abc sera

$$mx+ny+pz=1.$$

Pour avoir les équations des autres faces, il suffit d'observer que le quatrième sommet d doit se trouver nécessairement dans l'angle trièdre des x, y, z négatifs, pour que le point o tombe, suivant l'hypothèse, dans l'intérieur du tétraèdre. Soient donc $-x_0$, $-y_0$, $-z_0$ les coordonnées de ce point d, on aura pour équation des faces bcd, *acd*, *abd* respectivement

$$\frac{x}{x_0}=-\frac{1-ny-pz}{1+ny_0+pz_0},\quad \frac{y}{y_0}=-\frac{1-mx-pz}{1+mx_0+pz_0},$$

$$\frac{z_0}{z_0}=-\frac{1-mx-ny}{1+mx_0+ny_0}.$$

De là nous déduirons, pour les valeurs absolues des distances à l'origine,

$$(1)\quad oa'=\frac{x_0}{1+ny_0+pz_0},\quad ob'=\frac{y_0}{1+mx_0+pz_0},\quad oc'=\frac{z_0}{1+mx_0+ny_0};$$

on a d'ailleurs

$$od=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$

et, pour avoir od', il suffit d'observer que les équations de la droite indéfinie bb' sont

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

Ces équations combinées avec les équations (1) donnent pour l'ordonnée z du point d'

$$z=\frac{z_0}{mx_0+ny_0+pz_0},\quad \text{et, par suite,}\quad od'=\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}{mx_0+ny_0+pz_0}.$$

D'après tout cela, on a

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{oa}+\frac{1}{oa'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{ob}+\frac{1}{ob}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{oc}+\frac{1}{oc'}\right)^2}$$

$$=\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{(1+mx_0+ny_0+pz_0)^2}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+\frac{mx_0+ny_0+pz_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right)^2}=\left(\frac{1}{od}+\frac{1}{od'}\right)^2,$$

C. Q. F. D.

Question 711-I

Par M. AUDOYNAUD,
Professeur au lycée de Poitiers.

En désignant par x_r, y_r, z_r les coordonnées d'un point a_r, on a, pour un point quelconque O,

$$\begin{vmatrix} \overline{Oa_1}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \overline{Oa_2}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \overline{Oa_3}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \overline{Oa_4}^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \overline{Oa_5}^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = \text{const.}$$

Lorsque les points a_r sont sur une sphère, on sait que ce déterminant est nul. (Faure.)

Supposons les axes rectangulaires, et soient α, β, γ les coordonnées variables du point O; on a

$$(\alpha - x_r)^2 + (\beta - y_r)^2 + (\gamma - z_r)^2 = \overline{Oa_r}^2$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha x_r - 2\beta y_r - 2\gamma z_r + R_r^2 - \overline{Oa_r}^2 = 0,$$

en appelant R_r la distance du point a_r à l'origine. On obtient ainsi cinq équations en faisant successivement $r = 1, 2, 3, 4, 5$, et l'élimination des quatre quantités $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, -2α, -2β, -2γ, donne

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & R_1^2 - \overline{Oa_1}^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & R_2^2 - \overline{Oa_2}^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & R_3^2 - \overline{Oa_3}^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & R_4^2 - \overline{Oa_4}^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & R_5^2 - \overline{Oa_5}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \overline{Oa_1}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \overline{Oa_2}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \overline{Oa_3}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \overline{Oa_4}^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \overline{Oa_5}^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ R_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ R_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ R_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ R_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6(R_1^2 v_1 - R_2^2 v_2 + R_3^2 v_3 - R_4^2 v_4 + R_5^2 v_5) = \text{const.}$$

J'appelle v_1 le volume du tétraèdre $a_2 a_3 a_4 a_5$, v_2 celui du tétraèdre $a_1 a_3 a_4 a_5 \ldots$.

Si les points a_r sont sur une sphère et que l'origine des coordonnées en soit le centre, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 sont égaux, et le dernier déterminant sera nul, puisqu'en mettant R^2 en facteur deux colonnes seront identiques.

Note. — MM. F. Richard, élève du collége Chaptal (classe de M. Amiot), Le Bel et Talayrach, du lycée Charlemagne, Rezzonico et le P. Autefage, S. J., ont donné une démonstration exacte, mais un peu moins simple.

Question 711-IV ;

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon,

Une équation de la forme

$$(1) \begin{cases} F(a).x^m + F(a+1)x^{m-1} + \ldots + F(a+r)x^{m-r} + \ldots \\ \qquad + F(a+m-1)x + F(a+m) = 0, \end{cases}$$

dans laquelle $F(a)$ *désigne une fonction algébrique du degré* $m-2$ *au plus, a toujours des racines imaginaires.*

(FAURE.)

1. Soit $m - s$ le degré de $F(a)$, $s \geqq 2$, l'équation

$$(2) \quad (x-1)^{m-s+1}[F(a)x^m + \ldots + F(a+r)x^{m-r} + \ldots + F(a+m)] = 0$$

ne peut avoir de racines imaginaires qu'autant que l'équation (1) elle-même en a : en développant les calculs, on trouve que les coefficients des termes de degré m, $(m-1), \ldots, (m-s+1)$ sont les différences d'ordre $m-s+1$ d'une fonction entière de degré $m-s$, différences égales à zéro.

L'équation (2), supposée ordonnée, renferme donc des termes consécutifs nuls en nombre $s \gtreqless 2$; donc elle a des racines imaginaires.

2. En suivant la même marche, on démontrerait la proposition suivante :

Une équation algébrique, entière, complète et ordonnée, a des racines imaginaires si certains coefficients consécutifs forment une série dont les différences d'ordre inférieur de deux unités au nombre de ses termes soient nulles.

3. On en déduit une proposition énoncée au grand concours de 1842, par M. Hermite, actuellement membre de l'Institut :

Lorsque les coefficients de quatre termes consécutifs forment une progression par différence, l'équation a des racines imaginaires. (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. Ier, p. 385.)

Question 712

(voir 2e série, t. III, p. 444);

PAR M. A. GRASSAT,
Elève du lycée de Lyon.

Une ellipse E *étant donnée, décrire une autre ellipse* E′ *concentrique et homothétique à la première, telle que, si d'un point* A *pris arbitrairement sur* E *on mène à* E′ *deux tangentes* AM, AN, *rencontrant* E *en des* *points* B, C, *la droite* BC *soit tangente à l'ellipse* E'.

Cette condition étant remplie, démontrer que l'aire du triangle ABC *est invariable, ainsi que la somme des distances de ses trois sommets* ABC *à un foyer de l'ellipse donnée* E.

L'équation de la conique donnée étant

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

celle de l'autre sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - k^2 = 0,$$

et il suffit de déterminer k.

Or, α, β étant les coordonnées du point A, le système des deux tangentes AM, AN est représenté par

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - k^2\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - k^2\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2\right)$$

ou

$$(2) \qquad \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2}\right)^2 + k^4 - 2k^2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - k^2\right)(1 - k^2) = 0,$$

puisque

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

Multipliant l'équation (1) par $1 - k^2$ et ajoutant à l'équation (2), on a

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2}\right)^2 + k^4 - 2k^2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2}\right) + (1 - k^2)(k^2 - 1) = 0$$

ou

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2}\right)^2 - 2k^2\left(\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) - 1 = 0,$$

et

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+1-2k^2\right)=0.$$

J'ai donc ainsi un système de deux droites dont l'une

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0$$

est la tangente en A à l'ellipse E; donc l'autre

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+1-2k^2=0$$

représente la droite BC. Pour qu'elle soit tangente à E′, il faut l'identifier avec

$$\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}-k^2=0,$$

ce qui donne

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{2k^2-1}{k^2}.$$

Comme

$$\frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}-k^2=0,$$

on en tire, en éliminant α', β',

$$(2k^2-1)^2-k^2=0,$$
$$(2k^2-k-1)(2k^2+k-1)=0,$$
$$(2k+1)(k-1)(2k-1)(k+1)=0.$$

On ne peut prendre que les solutions positives, et comme $k=1$ donne l'ellipse proposée, il faut prendre $k=\frac{1}{2}$. Les axes de l'ellipse cherchée sont donc la moitié de ceux de l'ellipse donnée. La droite BC a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{1}{2}=0;$$

sa distance du point A est

$$h^2 = \frac{\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{\alpha^2}{a^4} + \dfrac{\beta^2}{b^4}} = \frac{3a^4b^4}{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}.$$

Les abscisses de ses points d'intersection avec l'ellipse E sont données par l'équation

$$(3) \qquad b^2x^2 + b^2\alpha x + \frac{a^2}{4}(b^2 - 4\beta^2) = 0.$$

Alors la longueur de la droite BC est

$$\delta^2 = \frac{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}{a^4\beta^2}\left[\alpha^2 - \frac{a^2}{b^2}(b^2 - 4\beta^2)\right]$$
$$= \frac{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}{a^4\beta^2} \cdot \frac{3a^2\beta^2}{b^2} = 3\,\frac{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}{a^2b^2}.$$

Si s est la surface du triangle ABC,

$$4s^2 = h^2\delta^2 = 9a^2b^2,$$
$$2s = 3ab;$$

elle est donc constante et égale aux trois quarts du rectangle construit sur les axes.

Quant à la somme l des distances des points A, B, C à un foyer de l'ellipse E, elle est représentée par

$$l = 3a \pm \frac{c}{a}(\alpha + x' + x''),$$

x', x'' étant les abscisses des points B et C.

Or, d'après l'équation (3),

$$x' + x'' = -\alpha,$$

donc

$$l = 3a = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Même question (solution géométrique);

PAR M. LÉON D'APVRIL,
Élève du lycée de Grenoble.

1. Concevons que l'ellipse donnée soit placée sur un cylindre de révolution; dans le cercle, base de ce cylindre, inscrivons un triangle équilatéral quelconque, et dans ce triangle une circonférence. Le cylindre ayant pour base cette circonférence et parallèle au premier cylindre, sera coupé par le plan de l'ellipse donnée suivant l'ellipse cherchée.

2. Les triangles tangents à l'ellipse intérieure et ayant leurs sommets sur l'ellipse extérieure sont équivalents, car leurs projections sur le plan de la base du cylindre, étant des triangles équilatéraux inscrits dans le même cercle, sont égaux.

3. Si l'on inscrit dans le second cylindre une sphère tangente au plan de l'ellipse, le point F de contact sera le foyer. Les troncs de prismes ayant pour base supérieure les divers triangles inscrits dans l'ellipse et pour base inférieure les projections de ces triangles sur le plan du cercle de contact sont équivalents, comme ayant pour mesure chacun la surface d'un triangle équilatéral multipliée par la distance du centre de l'ellipse au centre du cercle. Or, cette distance est d'une part égale au demi-grand axe de l'ellipse, et d'autre part, en vertu de ce que nous venons de dire, au tiers de la somme des trois arêtes du prisme. Mais chacune de ces arêtes est égale à la distance du sommet du triangle au foyer de l'ellipse. Donc, la somme des distances des trois sommets d'un triangle satisfaisant à la question à un même foyer de l'ellipse, est constante et égale à trois fois le demi-grand axe de l'ellipse.

Note du Rédacteur. — La question 712 se rattache à la belle théorie des polygones simultanément inscrits et circonscrits, due à M. Poncelet. — Autre solution géométrique par MM. Le Bel et Talayrach, élèves du lycee Charlemagne.

Question 713

(voir 2e série, t. III, p. 444);

PAR MM. DROUARD ET YVER,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

On donne dans l'espace deux droites indéfinies L, L', *non situées dans le même plan, et un point* O. *Décrire de ce point comme centre une sphère qui coupe les droites* L, L', *en des points* A, B, A', B' *tels, que le tétraèdre* AB A'B', *qui a ces points d'intersection pour sommets, soit équivalent à un cube donné* C^3.

Rappelons d'abord que le volume du tétraèdre ABA'B' est représenté par $\frac{1}{6}\,\mathrm{AB}.\mathrm{A'B'}h\sin(\mathrm{L},\mathrm{L'})$, h étant la plus courte distance des deux droites. Soient r le rayon de la sphère, et d, d' les distances du point donné aux deux droites. On aura

$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{r^2 - d^2},\quad \mathrm{A'B'} = 2\sqrt{r^2 - d'^2}.$$

On a donc l'équation

$$(1)\qquad 2\sqrt{r^2 - d^2}\sqrt{r^2 - d'^2}\,h\sin(\mathrm{L},\mathrm{L'}) = 3\mathrm{C}^3,$$

ou, en élevant au carré et ordonnant,

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} 4h^2\sin^2(\mathrm{L},\mathrm{L'})\,r^4 - 4h^2\sin^2(\mathrm{L},\mathrm{L'})(d^2 + d'^2)\,r^2 \\ \qquad + 4h^2d^2d'^2\sin^2(\mathrm{L},\mathrm{L'}) - 9\mathrm{C}^6 = 0. \end{array}\right.$$

Pour que les valeurs de r^2 soient réelles, il faut que l'on ait

$$h^2\sin^2(\mathrm{L},\mathrm{L'})\,[9\mathrm{C}^6 + h^2(d^2 - d'^2)^2\sin^2(\mathrm{L},\mathrm{L'})] > 0.$$

Cette condition est toujours satisfaite.

Soit $d^2 > d'^2$. d^2 est compris entre les deux valeurs de r^2, puisque d^2, mis à la place de r^2 dans l'équation (2), rend le premier membre négatif. La plus grande convient seule. Cette racine est positive. Le problème admet donc toujours une solution, ce qu'on prévoyait à l'avance, et il n'en admet qu'une.

Note. — Autre solution par M. Rezzonico et par MM. Le Bel et Talayrach.