NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. GODART

Sur la cyclide

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 219-225

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__219_0>

SUR LA CYCLIDE;

PAR M. A. GODART,

On nomme *cyclide* la surface enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes.

La cyclide a quatre nappes, de même qu'il y a quatre séries de cercles tangents à trois cercles fixes. Dans ce qui va suivre, nous considérerons une nappe isolée, que nous pouvons définir de la manière suivante : Nous avons dans un plan deux cercles fixes (o) et (o'), et nous imaginons tous les cercles tels que (a) tangents extérieurement à (o') et intérieurement à (o). Les sphères qui ont les cercles (a) pour grands cercles enveloppent une nappe de la cyclide.

Si nous considérons deux sphères (a) suffisamment rapprochées pour qu'elles se coupent, nous voyons que leur cercle commun prendra une position limite quand l'une des sphères viendra se confondre avec l'autre; cette position limite du cercle sera précisément la ligne de contact de la sphère (a) avec la cyclide.

Les plans de tous ces cercles de contact sont évidemment perpendiculaires au plan des cercles (o) et (o'); et de plus ils passent tous par une même droite. Nous savons en effet que si l'on mène un cercle tangent à deux cercles fixes, la droite qui passe par les points de contact contient toujours un des centres de similitude des cercles fixes. Ainsi, le cercle (a) touche les deux circonférences (o) et (o') aux points k et l, et la ligne kl va passer par le centre de similitude inverse C_i de (o) et (o'). Et par conséquent la sphère (a) touche la cyclide suivant un cercle projeté sur kl, dont le plan contient la ligne menée par C_i perpendiculairement au plan de (o) et (o').

M. Dupin, dans ses *Applications de Géométrie*, p. 200, étudie la surface dont toutes les lignes de courbure sont circulaires. Il démontre que cette surface est nécessairement l'enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes. Il lui donne le nom de *cyclide* et en expose les principales propriétés.

M. Mannheim, au moyen de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques, ramène l'étude de la cyclide à l'étude du tore. Il démontre avec beaucoup d'élégance les propriétés déjà connues de cette surface et en indique plusieurs tout à fait nouvelles. Ainsi, M. Mannheim fait voir que toute sphère bitangente rencontre la cyclide suivant deux circonférences. D'où il conclut que tout plan bitangent contient également deux cercles de la surface (*Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 67).

Nous nous proposons de démontrer que les plans bitangents à la cyclide enveloppent un cône, que ce cône est du second degré, et qu'il touche la surface suivant une ligne sphérique.

Commençons par chercher l'intersection de la cyclide avec une sphère bitangente qui ait son centre dans le plan des cercles (o) et (o'). Nous savons, d'après le théorème de M. Mannheim, que cette intersection se compose de deux cercles. Nous allons donner de ce fait une nouvelle démonstration qui nous indiquera la position du plan bitangent.

Le plan qui contient les cercles (o) et (o') et aussi le centre de la sphère bitangente considérée coupe cette dernière suivant un cercle qui touche à la fois (o) et (o'). Les deux points de contact seront sur une droite qui passe par le centre de similitude C_d.

Et réciproquement, si par C_d nous menons une droite quelconque C_dS (*), elle coupera les cercles (o) et (o') en quatre points α, β, α', β', et l'on pourra toujours construire une circonférence qui touche (o) en α et (o') en α'. De même on pourra toujours construire une circonférence tangente en β au cercle (o') et en β' au cercle (o).

Si l'on joint o et α, o' et α', les deux lignes ainsi obtenues se rencontrent en γ' qui est le centre du cercle qui touche (o) en α et (o') en α'.

Si l'on joint de même o à β' et o' à β, on obtiendra un second cercle (γ) tangent à (o') en β et à (o) en β'.

Considérons en particulier la sphère qui a (γ') pour grand cercle et qui est bitangente à la cyclide aux points α et α'. La sphère (γ') coupe l'une des sphères génératrices (a) suivant un cercle projeté sur hf. Mais la sphère génératrice (a) touche la cyclide suivant un cercle projeté sur kl, de sorte que le point μ, intersection de hf et de kl, est la projection de deux points communs à la cyclide et à la sphère (γ').

Quand la sphère (a) engendre la cyclide, le point μ engendre une courbe dont nous allons déterminer la nature, et qui est la projection de l'intersection de la sphère (γ') avec la cyclide.

hf est la tangente en μ au lieu décrit par le point μ. Car deux lignes infiniment voisines telles que hf se rencontrent sur la corde commune aux deux circonférences (a) correspondantes. Or, cette corde commune qui passe constamment par C_i a précisément pour limite kl.

Si nous menons la tangente en l à la circonférence (o), elle coupera hf en I. Ce point est sur la tangente menée

(*) Le point S est situé sur l'axe radical de (o) et de (o').

en α à la circonférence (o). Le point I est en effet le point de concours des trois cordes communes aux circonférences (a), (o) et (γ').

A un point μ correspond donc sur le cercle (o) un point l, ces deux points étant situés sur une droite qui passe toujours par le point fixe C_i pendant que les tangentes à leurs courbes respectives se rencontrent en I sur la droite fixe $I\alpha$.

Nous concluons de là que lorsque la sphère (a) engendre la cyclide, le point μ décrit une courbe homologique de (o), C_i étant le centre et αI l'axe d'homologie.

Or, la courbe homologique d'un cercle est une conique (*). Donc le lieu des points μ est une conique.

hf se confond en α avec la tangente au cercle (o) et en α' avec la tangente au cercle (o'). Ainsi la conique décrite par μ est tangente en α et α' au cercle (γ').

Le cylindre droit qui a pour base la courbe μ rencontre la sphère (γ') suivant l'intersection cherchée. Le cylindre et la sphère ont un double contact en α et α'. Il résulte d'un théorème de Monge (**) que ces deux surfaces ont en commun deux courbes planes et par conséquent deux cercles qui se coupent en α et α'.

La sphère (γ) rencontre de même la cyclide suivant deux autres cercles qui se coupent en β et β'. J'ajoute que ces quatre cercles sont deux à deux dans le même plan.

En effet, le plan qui, passant par α et α', contient l'un

(*) Poncelet, *Traité des Propriétés projectives des figures*, t. I.

(**) *Deux surfaces du second degré qui ont un double contact se rencontrent suivant deux courbes planes* : théorème énoncé par Monge, démontré par M. Chasles dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*, t. III, p. 335.

Voir, dans le si remarquable *Supplément au Traité des Propriétés projectives*, l'élégante démonstration que le général Poncelet donne de ce théorème.

des cercles communs à la sphère (γ') et à la cyclide, rencontre en deux points le cercle suivant lequel se coupent (γ) et (γ'). Ces deux points sont évidemment communs à la sphère (γ) et à la cyclide. Ils appartiennent à l'un des deux cercles de (γ). Et comme ce cercle passe déjà par β et β', il se trouve bien placé dans le plan précédemment considéré. Ce plan est bitangent à la surface aux deux points communs aux cercles qu'il renferme (*).

Mais $\alpha\beta'$ passe par le point fixe C_d, d'où nous concluons que *les plans bitangents enveloppent un cône.*

Nous allons voir de plus que ce cône est du second ordre.

Nous savons que lorsque deux cercles sont tangents à deux autres, leur corde commune passe par un centre de similitude des deux derniers. Ainsi la corde commune MM' à (γ) et (γ') passe par C_d, centre de similitude directe de (o) et (o').

Nous avons déjà précédemment remarqué que les deux points de contact du plan bitangent sont sur le cercle commun aux sphères (γ) et (γ'), qui se projette sur MM'. Si maintenant nous considérons le cône enveloppe, nous voyons que, $C_d\alpha$ étant la trace d'un plan tangent à ce cône, C_dM sera la projection de la génératrice de contact.

$C_d\alpha$ et C_dM sont, comme nous allons le démontrer, parallèles à un système de diamètres conjugués d'une conique qui aurait pour axe $C_d\sigma$ (**). Or c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que le cône soit du second degré.

Remarquons que $C_d\alpha$ rencontre $\gamma\gamma'$ en un point S précisément situé sur la corde commune $S\sigma$ à (o) et (o').

(*) La cyclide offre un cas particulier des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre étudiées par M. Moutard.

(**) Le point σ est sur l'axe radical de (o) et de (o').

En effet, les deux cercles (o) et (o') étant tangents à la fois à (γ) et à (γ'), leur corde commune contient l'un des centres de similitude de (γ) et (γ'). D'ailleurs, la droite $\alpha\beta'$ qui joint les points de contact passe également par ce centre de similitude, qui est encore nécessairement situé sur la ligne des centres $\gamma\gamma'$. Ainsi les trois lignes $\gamma\gamma'$, $C_d\alpha$, σS se coupent bien au même point. Ceci posé, désignons par ε et ε' les angles que font avec oo', les deux lignes $C_d\alpha$ et C_dM, et observons que MM', corde commune à (γ) et (γ'), est perpendiculaire sur la ligne des centres $\gamma\gamma'$.

Le triangle rectangle $SC_d\sigma$ donne

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{S\sigma}{C_d\sigma}.$$

Le triangle rectangle $\omega S\sigma$ donne

$$\text{tang}\,\varepsilon' = -\frac{S\sigma}{\omega\sigma},$$

d'où

$$\text{tang}\,\varepsilon \times \text{tang}\,\varepsilon' = -\frac{\omega\sigma}{C_d\sigma} = \text{const.},$$

ce qui caractérise les deux directions de deux diamètres conjugués d'une conique.

On peut donc circonscrire à la cyclide un cône bitangent du second degré (*).

Nous déterminerons la ligne de contact en remarquant que les points tels que M sont disposés sur une circonférence décrite de ω (**) comme centre. En effet,

$$C_dM \times C_dM' = C_d\alpha \times C_d\alpha'.$$

(*) Dans l'anallagmatique générale du quatrième ordre, les plans doublement tangents se répartissent suivant les plans tangents à cinq cônes du second degré (*voir* dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 206, la note de M. Moutard).

(**) Le point ω est au milieu de la ligne oo'.

Ce dernier produit est constant, parce que C_d est le centre de similitude de (o) et (o'). De plus, MM' corde commune à (γ) et (γ') est perpendiculaire en son milieu D à la ligne des centres $\gamma\gamma'$. Le point D décrit donc une circonférence dont ωC_d est le diamètre; et il est ainsi prouvé que M et M' sont sur une même circonférence dont ω est le centre. La sphère qui a pour grand cercle la circonférence décrite par M passe évidemment par l'intersection des sphères (γ) et (γ'). Elle contient donc les points de contact du cône avec la cyclide.

Ainsi *la ligne de contact du cône est la ligne commune à la sphère* (ω) *et à la cyclide.*

Au surplus, il serait facile de construire par points la projection de cette courbe sur le plan oo'. Décrivons de S comme centre une circonférence qui passe par M. Elle sera orthogonale à (o) et à (o'), parce que S est le centre de similitude de (γ) et (γ'). Par conséquent, les deux points d'intersection p et q sont sur une droite qui passe par le centre de similitude directe C_i de (o) et (o'). La ligne pq est, d'après une remarque faite au commencement de cet article, la projection d'un cercle de la cyclide. Ce cercle coupe le cercle commun aux sphères (γ) et (γ'), projeté sur MM'; car le cercle pq et le cercle MM' sont tous deux sur la sphère S. Or le cercle MM' contient, comme nous le savons, les points de contact relatifs au plan bitangent. Donc ces points se projettent sur m où se coupent les deux droites pq et MM'.
