Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 278-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__278_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 707

(voir 2e série, t. III, p. 253);

PAR M. MARCEL BERTRAND (*),
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet).

On donne sur un plan deux coniques homofocales (O) *et* (O'). *Par un point fixe* A *de la première on trace une conique* (C) *tangente en ce point à la conique* (O), *et doublement tangente à la seconde conique* (O'). *Le lieu des points de concours des tangentes communes aux coniques* (O) *et* (C) *est une conique homofocale aux coniques données.* (MANNHEIM.)

(*) Fils de M. Joseph Bertrand.

Cette proposition est un cas particulier de la suivante :

Si d'un point fixe P, *pris d'une manière quelconque dans son plan, on mène deux tangentes à la conique* (O), *et que l'on considère les diverses coniques tangentes à ces deux droites et doublement tangentes à la conique* (O'), *le lieu des points de rencontre des tangentes communes à ces coniques et à la conique* (O) *se compose des deux coniques homofocales aux proposées et passant par le point* P.

Cette question, ainsi que la plupart de celles où il s'agit des points de rencontre de tangentes communes à deux courbes, se traite plus simplement par les coordonnées tangentielles. Rappelons d'abord les principes suivants :

L'équation de la droite étant prise sous la forme

$$mx + ny + 1 = 0,$$

si ses coefficients satisfont à une relation du premier degré

$$am + bn + 1 = 0,$$

la droite passe constamment par le point (a, b). On peut donc dire que

$$am + bn + 1 = 0$$

est l'*équation* de ce point. De même, si les coefficients m et n sont liés par une relation du second degré, la droite enveloppe une conique, et la relation entre m et n est l'*équation* de cette conique. Il est clair que toute conique inscrite dans un quadilatère dont les sommets ont pour équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

a une équation de la forme

$$\alpha\beta + \lambda\gamma\delta = 0.$$

Plus généralement, soit $S = 0$ l'équation d'une conique. Toute conique qui a pour points de rencontre de ses tangentes communes avec cette première conique les points $\alpha = 0$, $\beta = 0$, a une équation de la forme

$$S + \lambda\alpha\beta = 0;$$

par suite, la forme générale de l'équation des coniques doublement tangentes est

$$S + k\alpha^2 = 0.$$

Ceci posé, prenons pour axes, dans la question proposée, les axes communs des deux coniques (O) et (O′). Soit $2c$ la distance des foyers. Ces coniques sont inscrites dans le quadrilatère formé par les points

$$m + n\sqrt{-1} = 0, \quad m - n\sqrt{-1} = 0, \quad cm + 1 = 0, \quad cm - 1 = 0;$$

leurs équations sont donc

$$(\mathrm{O}) \qquad k\,(m^2 + n^2) + c^2m^2 - 1 = 0,$$

$$(\mathrm{O}') \qquad k'(m^2 + n^2) + c^2m^2 - 1 = 0.$$

Soient α et β les coordonnées du point P; appelons x et y les coordonnées d'un point du lieu. D'après ce qui précède, l'équation d'une conique satisfaisant à la première condition de l'énoncé est de la forme

$$(1) \quad k(m^2+n^2) + c^2m^2 - 1 + \lambda(\alpha m + \beta n + 1)(xm + yn + 1) = 0.$$

Pour que cette conique soit doublement tangente à la conique (O′), il faut que son équation puisse s'identifier avec l'équation générale des coniques qui remplissent cette seconde condition, c'est-à-dire

$$(2) \quad k'(m^2 + n^2) + c^2m^2 - 1 + \mu(\gamma m + \delta n + 1)^2 = 0.$$

En identifiant, on trouve les cinq relations

$$\frac{c^2(\lambda - 1)}{c^2(\mu - 1)} = \frac{k + c^2 + \lambda\alpha x}{k' + c^2 + \mu\gamma^2} = \frac{-(k + \lambda\beta y)}{-(k^2 + \mu\delta^2)}$$
$$= \frac{\lambda(\alpha y + \beta x)}{2\mu\gamma\delta} = \frac{\lambda(\alpha + x)}{2\mu\gamma} = \frac{\lambda(\beta + y)}{2\mu\delta}.$$

En éliminant λ, μ, γ, δ entre ces équations, on obtient une relation entre les coordonnées x et y d'un point du lieu, c'est-à-dire l'équation du lieu en coordonnées ordinaires.

Pour éliminer λ et μ, remplaçons une quelconque des trois premières fractions, comme cela est permis, par celle qu'on obtient en prenant le rapport de la somme de leurs numérateurs à la somme de leurs dénominateurs. Il suffit alors de supprimer les deux autres pour faire l'élimination, car $\frac{\lambda}{\mu}$ se trouve en facteur dans les quatre fractions restantes.

Il ne reste donc plus qu'à éliminer γ et δ entre les trois équations

$$\frac{\alpha y + \beta x}{2\gamma\delta} = \frac{\alpha + x}{2\gamma} = \frac{\beta + y}{2\delta} = \frac{\alpha x - \beta y + c^2}{\gamma^2 - \delta^2 + c^2}.$$

Remarquons maintenant que ces équations sont indépendantes de k et de k'; par suite, le lieu proposé reste le même, de quelque manière que les coniques (O) et (O') aient été choisies parmi celles du système. Nous pouvons donc supposer qu'elles coïncident et passent toutes deux par le point P; les coniques variables (C) sont alors doublement tangentes à une conique fixe, l'un des points de contact restant fixe. Il est clair que le second point de contact décrit toute la conique proposée; mais, dans ce cas particulier, le lieu demandé devient précisément le lieu de ce point de contact. On reconnaît donc ainsi que les deux coniques du système qui passent par le point P font toutes deux partie du lieu. Il est d'ailleurs facile de voir que l'élimination conduit à une équation du quatrième degré : donc ces deux coniques composent tout le lieu.

Ce résultat se vérifie bien simplement en achevant le calcul. On trouve pour l'équation du lieu

$$(\alpha y+\beta x)^2[(\alpha+x)^2-(\beta+y)^2]+c^2(\alpha+x)^2(\beta+y)^2$$
$$=2(\alpha y+\beta x)(\alpha x-\beta y+c^2)(\alpha+x)(\beta+y),$$

ou bien, en développant et réduisant,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\beta^2x^4-\alpha^2y^4+(\beta^2-\alpha^2+c^2)x^2y^2-\beta^2(\alpha^2+\beta^2+c^2)x^2\\&\quad+\alpha^2(\alpha^2+\beta^2-c^2)y^2+\alpha^2\beta^2c^2=0.\end{aligned}\right.$$

Or, pour former l'équation des deux coniques homofocales aux proposées, et passant par le point (α,β), il suffit d'éliminer b entre les deux équations

$$\frac{x^2}{b+c^2}+\frac{y^2}{b}=1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^2}{b+c^2}+\frac{\beta^2}{b}=1.$$

L'élimination, qui se fait sans difficulté, conduit précisément à l'équation (3). Le théorème est donc démontré.

Comme cas particulier, on retrouve un théorème connu. En effet, supposons k' infini, ce qui ne change pas la nature du lieu cherché. L'équation de la conique (O′) se réduit alors à $m^2+n^2=0$, c'est-à-dire que cette conique se réduit elle-même aux deux points circulaires à l'infini. Dans ce cas, toute conique doublement tangente est un cercle, et réciproquement tout cercle peut être considéré comme satisfaisant à la condition du double contact. Si, de plus, nous supposons le point P sur la conique (O), nous retombons sur le théorème relatif aux points de concours des tangentes communes à une courbe du second degré et à un cercle qui la touche en un point fixe.

Si on s'était proposé de déterminer l'enveloppe de la corde de contact de la conique variable avec la conique (O′), ou le lieu du pôle de cette corde, des considérations analogues aux précédentes auraient mené de même au résultat. En effet, pour avoir le lieu du pôle de la corde de contact, dont nous avons désigné les coordonnées par γ et δ, il suffit d'éliminer λ, μ, x et y entre les équations fournies par l'identification. L'élimination de λ et de μ faisant disparaître k et k', nous pouvons encore ramener le problème au cas beaucoup plus simple déjà considéré, et l'on reconnaît ainsi que le pôle de la corde des contacts se meut sur les deux tangentes menées aux coniques du système par le point P aux coniques qui passent par ce point. Par suite, la corde des contacts passe constamment par le pôle d'une de ces droites par rapport à la conique (O′).

On peut enfin remarquer que les théorèmes qui précèdent, n'ayant rapport qu'à des propriétés projectives, peuvent s'étendre à deux coniques inscrites dans un quadrilatère quelconque.

Question 771;

PAR M. A. LEMAITRE,
Répétiteur au lycée de Besançon.

Sur toutes les tangentes à une courbe S *et à partir du point de contact* M *on prend une longueur constante* MM_1. *La normale à la courbe* S_1, *lieu du point* M_1, *passe par le centre de courbure* O *de la courbe* S *au point* M. *Sur la normale* M_1O *et au point* O *élevons une perpen-*

diculaire qui coupe la tangente MM_1 *au point* T. *La droite* CT, *qui joint le point* T *au centre de courbure* C *de la développée de* S *au point* O, *coupe la normale* M_1O *en un point* O_1 *qui sera le centre de courbure de la courbe* S_1 *au point* M_1. (Nicolaïdès.)

On peut considérer la courbe S comme engendrée par le point M fixe sur la normale MO roulant sans glissement sur la développée D de la courbe S. La tangente MM_1 sera alors une droite invariablement liée au mouvement de MO, et M_1 un point fixe pris sur cette droite mobile et la suivant dans son mouvement. Mais les normales aux trajectoires des différents points du système mobile et correspondant à une position particulière de ce système vont toutes passer par le point de contact de la ligne mobile et de la courbe fixe sur laquelle elle roule pour déterminer le mouvement du système mobile.

Ce point n'est ici autre que le point O.

Lorsqu'une ligne mobile OM roule sur une courbe fixe D en entraînant dans son mouvement un point fixe M_1, on sait que, R et R′ désignant les rayons de courbure de la courbe fixe et de la ligne mobile au point de contact O, par d la distance M_1 O du point M_1 au point de contact O, par φ l'angle de la droite MO avec la tangente commune, et enfin par ρ le rayon de courbure O_1M_1 de la trajectoire du point M_1, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho - d}\right).$$

Dans le cas actuel, la ligne mobile est droite; par suite R′ est infini, et l'on a

$$\frac{1}{R} - \sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho - d}\right):$$

d'où l'on déduit

$$\rho - d = \frac{Rn\sin\varphi}{n - R\sin\varphi} = \frac{Rn}{\frac{n}{\sin\varphi} - R};$$

$\rho - d$ sur la figure, c'est OO_1, O_1 étant le centre de courbure. Supposons le point O_1 défini par l'intersection de CT et de OM_1, et montrons que OO_1 aura la même expression, nous aurons démontré la construction. Remarquons d'abord que CO, normale de la développée D, est perpendiculaire à la droite MO qui lui est tangente, et que par suite CO est parallèle à MT. Les deux triangles O_1M_1T, O_1OM sont par suite semblables, et l'on a

$$\frac{O_1M_1}{O_1O} = \frac{M_1T}{OC}$$

ou

$$\frac{O_1O}{O_1M_1 - O_1O}\ \frac{O_1O}{OM_1} = \frac{OC}{M_1T - OC}.$$

Mais, dans le triangle rectangle OM_1T, on a, en se rappelant que $M_1OM = \varphi$ et par suite $OM_1M = \frac{\varpi}{2} - \varphi$,

$$M_1T = \frac{M_1O}{\sin\varphi}.$$

Mais

$$M_1O = n, \quad OC = R;$$

l'égalité ci-dessus devient

$$\frac{O_1O}{n} = \frac{R}{\frac{n}{\sin\varphi} - R},$$

ce qui donne pour OO_1 la même expression que ci-dessus.

Note. — Autres démonstrations géométriques et analytiques par MM. Roux, Pellet, élèves du lycée de Nîmes; Adam Rymazewski, de l'École supérieure polonaise; de MM. Bodemer, Laisant et Maffiotti.