NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. LEFORT

Sur la recherche d'un logarithme isolé, avec un grand nombre de décimales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 308-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__308_1>

SUR LA RECHERCHE D'UN LOGARITHME ISOLÉ, AVEC UN GRAND NOMBRE DE DÉCIMALES;

Par M. F. LEFORT.

La formule des différences, qui exprime le procédé d'interpolation de Mouton, est la seule que l'on puisse admettre aujourd'hui, lorsqu'il s'agit de calculer une table logarithmique un peu étendue, c'est-à-dire lorsque l'on veut avoir une série de logarithmes répondant à une série de nombres croissant suivant une loi déterminée. Mais son application à la recherche d'un logarithme isolé, par interpolation, dans les tables à un grand nombre de décimales, est très-laborieuse. Les formules variées qui donnent elles-mêmes le développement de la fonction logarithmique en séries plus ou moins convergentes, ne sont avantageusement applicables que dans des cas très-particuliers, et leur emploi exige beaucoup d'adresse de la part du calculateur. Je vais exposer ici trois procédés généraux qui me paraissent les moins pénibles et les plus sûrs parmi le grand nombre de ceux qui ont été proposés pour déterminer des logarithmes isolés, avec beaucoup de décimales. Ces trois procédés reposent sur la décomposition du nombre donné en facteurs, et ne diffèrent que dans la manière de l'opérer.

Le premier, dans l'ordre des dates, a été donné par Briggs, en 1624, au chapitre XIV de l'*Arithmetica logarithmica*; le deuxième par R. Flower, en 1771; le troisième par l'auteur de cette Note, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1857.

Procédé de Briggs.

Soit N le nombre donné dont il s'agit de trouver le logarithme. Il peut toujours être considéré comme composé de deux parties D et d, dont l'une se trouvera dans la table que l'on possède, et qui, par le nombre de ses décimales, limite l'ordre de l'approximation. Je regarde ici D comme la partie entière du nombre, et d comme sa partie fractionnaire décimale. Cette hypothèse est faite uniquement pour abréger le discours et pour fixer les idées, car elle est sans influence sur la décomposition en facteurs, et sur la détermination du logarithme auquel on affectera en définitive la caractéristique convenable.

Ainsi

$$N = D + d = D\left(1 + \frac{d}{D}\right).$$

Appelons q_1 le premier chiffre décimal du quotient de d par D, et d_1 le reste; nous aurons

$$d = Dq_1 + d_1, \quad d_1 < d,$$

puis

$$N = D(1 + q_1) + d_1.$$

Posons

$$F_1 = Dq_1, \quad D_1 = D(1 + q_1) = D + F_1,$$

et divisons d_1 par D_1. Nous aurons

$$d_1 = D_1 q_2 + d_2, \quad d_2 < d_1.$$

Par suite

$$N = D(1 + q_1)(1 + q_2) + d_2.$$

Posons encore

$$F_2 = D_1 q_2, \quad D_2 = D_1(1 + q_2) = D_1 + F_2,$$

et divisons d_2 par D_2, il viendra

$$d_2 = D_2 q_3 + d_3, \quad d_3 < d_2.$$

Par suite

$$N = D(1 + q_1)(1 + q_2)(1 + q_3) + d_3.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que l'on arrive à un reste d_n, susceptible d'être négligé dans l'ordre d'approximation que l'on s'est fixé, on obtiendra

$$N = D(1 + q_1)(1 + q_2)\ldots(1 + q_n)$$

et

$$\log N = \log D + \log(1 + q_1) + \ldots + \log(1 + q_n).$$

Log N sera donc déterminé à l'aide de deux tables, dont l'une comprendra log D, et l'autre $\log(1 + q_n)$.

J'applique à un exemple donné par Briggs lui-même, et je rapporte nos notations sur le tableau des calculs qu'elles servent ainsi à expliquer.

		N	2966,82051 456	
		D	2966	
D	2966	d	82051 456	
F_1	5932	Dq_1	5932	2... q_1
D_1	2966,5932	d_1	22731 456	
F_2	20766 1524	$D_1\,q_2$	20766 1524	7... q_2
D_2	2966,80086 1524	d_2	1965 3036	
F_3	1780 08051 69	$D_2\,q_3$	1780 08051	6... q_3
D_3	2966,81866 23291 69	d_3	185 22308 31	
F_4	178 00911 97	$D_3\,q_4$	178 00911 97	6... q_4
D_4	2966,82044 24203 66	d_4	7 21396 34	
F_5	5 93364 09	$D_4\,q_5$	5 93364 09	2... q_5
D_5	2966,82050 17567 75	d_5	1 28032 25	
F_6	1 18672 82	$D_5\,q_6$	1 18672 82	4... q_6
D_6	2966,82051 36240 57	d_6	9359 43	
F_7	8900 46	$D_6\,q_7$	8900 44	3... q_7
D_7	2966,82051 45141 03	d_7	458 97	
F_8	296 68	$D_7\,q_8$	296 68	1... q_8
D_8	2966,82051 45437 71	d_8	162 29	
F_9	148 34	$D_8\,q_9$	148 34	5... q_9
D_9	2966,82051 45586 05	d_9	13 95	
F_{10}	11 87	$D_9\,q_{10}$	11 87	4... q_{10}
D_{10}	2966,82051 45597 92	d_{10}	2 08	
F_{11}	2 07	$D_{10}\,q_{11}$	2 07	7... q_{11}
D_{11}	2966,82051 45599 99	d_{11}	1	

Les facteurs sont ainsi donnés par le nombre symbolique

$$[1{,}00027\;66243\;1547],$$

en sorte que l'on a

$$\begin{aligned}2966{,}82051\;456 = 2966\,.\,1{,}0002\,.\,1{,}00007\,.\,1{,}0^{5}6\,.\,1{,}0^{6}6,\\ 1{,}0^{7}2\,.\,1{,}0^{8}4\,.\,1{,}0^{9}3\,.\,1{,}0^{10}1\,.\,1{,}0^{11}5\\ 1{,}0^{12}4\,.\,1{,}0^{13}7.\end{aligned}$$

L'indice placé en exposant indique le nombre des zéros qui suivent la virgule.

On prend alors dans les tables spéciales les logarithmes des facteurs ainsi qu'il suit (*) :

NOMBRES.	LOGARITHMES.
2966	3,47217 11466 9236
$1,0^{2}2$	8 68502 1165
$1,0^{4}7$	3 03995 4976
$1,0^{5}6$	26057 5907
$1,0^{6}6$	2605 7661
$1,0^{7}2$	86 8589
$1,0^{8}4$	17 3718
$1,0^{9}3$	1 3029
$1,0^{10}1$	434
$1,0^{11}5$	217
$1,0^{12}4$	17
$1,0^{13}7$	3
Log 2966,82051 456 =	3,47229 12733 4952

Procédé de Flower.

Le procédé de Flower consiste à rechercher des facteurs binômes, analogues à ceux de Briggs, dont le produit par le quotient $\frac{N}{D}$ diffère très-peu de l'unité, mais en moins ; de telle sorte qu'en appelant P le produit des facteurs binômes $(1,0^{n}\alpha)$, $(1,0^{n'}6)$,..., on ait

$$\frac{N}{D}.P = 0,9999\ldots.$$

Alors, dans l'ordre d'approximation cherché,

$$\log N = \log D - \log P = \log D + \operatorname{colog} P.$$

Le premier facteur sera d'autant plus petit que $\frac{N}{D}$ différera moins de $0,99,\ldots$; on choisira donc D de manière

(*) J'ai rectifié dans les Tables de Briggs quelques chiffres inexacts.

à avoir 9 ou un nombre peu différent de 9 pour le premier chiffre du quotient. On obtiendra très-sûrement ce résultat en prenant pour D un nombre supérieur d'une unité à celui que fournissent les quatre premiers chiffres de N. On effectuera le quotient complet de N par D ainsi déterminé.

Il faut maintenant multiplier ce quotient par un nombre de la forme $1,0^n\alpha$ tellement choisi, que le produit diffère moins de l'unité que ce quotient lui-même. Or,

$$\frac{N}{D}\times 1,0^n\alpha = \frac{N}{D} + \frac{N}{D}\cdot\frac{\alpha}{10^{n+1}},$$

et

$$\frac{N}{D} = 0,9\ldots abc\ldots.$$

Il faut donc que $\frac{\alpha}{10^{n+1}}$ soit d'un ordre décimal tel, que son produit par $\frac{N}{D}$ étant ajouté à $\frac{N}{D}$ ne donne pas un nombre supérieur à 1. Ainsi $\frac{\alpha}{10^{n+1}}$ est nécessairement d'un ordre décimal supérieur d'une unité à celui du dernier 9 de la première série du quotient. Il faut de plus que son produit par 0,9 soit tel, qu'ajouté à a il reproduise 9. Il est facile d'en conclure que α doit être le complément de a à 9, puisque

$$(9-a)\,0,9 + a = (9-a)(1-0,10) + a = 9 - \frac{9-a}{10}.$$

Le quotient total sera donc multiplié par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de 9 à l'origine, et d'un nombre qui sera le complément à 9 du premier chiffre du quotient différent de 9. Sur le produit obtenu, on répétera la même opération de multiplication que précédemment, par un facteur semblablement choisi, et on continuera ainsi jusqu'à ce que tous les chiffres du produit soient des 9 dans l'ordre d'approximation fixé d'avance.

J'applique ce procédé au nombre déjà choisi.

N = 2966,82051 456

	2670 3
	296 52
	267 03
18060	29 490
17802	26 703
25800	2 7875
23736	2 6703
20640	11721
17802	8901
28380	2820 4
26703	2670 3
16770	150 15
14835	148 35
1935	1 8060

D = 2967

$\frac{N}{D} = 0,99993\ 95060\ 8695$

PRODUITS.	FACTEURS.
99993 95060 86950 5 99963 70365	1,00006
99999 95024 57315 3999 99801	$1,0^6 4$
99999 99024 57116 899 99991	$1,0^7 9$
99999 99924 57107	$[1,0^8 7542892]$

Le nombre symbolique $[1,0^8 7542892]$ se forme en prenant le complément à 9 des chiffres du dernier produit que nous avons calculé. Il indique la série des derniers facteurs $1,0^8 7$, $1,0^9 5$, $1,0^{10} 4$, etc. Il résulte en effet de la conduite des opérations que le dernier produit, comprenant dans la période des 9 un nombre de chiffres supérieur à la moitié des chiffres totaux que l'on conserve dans l'ordre d'approximation fixé, la multiplication, par le deuxième chiffre des facteurs binômes, ne pourra fournir pour terme additif qu'un nombre composé de zéros et du complément à 9 du premier chiffre différent de 9.

FACTEURS.	LOGARITHMES.
$1,00006$	00002 60568 87215
$1,0^6\,4$	1737 17758
$1,0^7\,9$	390 86502
$1,0^8\,7$	30 40061
$1,0^9\,5$	2 17147
$1,0^{10}\,4$	17372
$1,0^{11}\,2$	869
$1,0^{12}\,8$	347
$1,0^{13}\,9$	39
$1,0^{14}\,2$	1
	00002 62729 67311
Compl^{t} logarithm.	99997 37270 32689
Log 2967.........	47231 75463 16840
Log N............	3,47229 12733 4953

Procédé du rédacteur de cette Note.

Soit

$$X = 1,\ 0^{n-1}\ a_n \ldots a_{n'} \ldots a_{n''} \ldots$$

un nombre fractionnaire quelconque peu différent de l'unité, et ayant l'unité à sa partie entière. a désigne un quelconque des caractères de la numération décimale, non spécialement défini, et les indices n, n', n'',..., font connaître l'ordre décimal de ce chiffre, c'est-à-dire que

$$a_n = \frac{a}{10^n}, \quad a_{n'} = \frac{a}{10^{n'}}, \ldots,$$

les valeurs numériques pouvant d'ailleurs être différentes dans les termes successifs.

Posons

$$P = (1 + a_n) \ldots (1 + a_{n'}) \ldots (1 + a_{n''}) \ldots .$$

D'après la règle de formation du produit des facteurs binômes,

$$P = 1 + \sum a_x + \sum a_x a_{x'} + \sum a_x a_{x'} a_{x''} + \ldots,$$

le signe $\sum$ embrassant toutes les valeurs et toutes les combinaisons différentes des chiffres et de leurs indices ; de telle sorte que

$$\sum a_x = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n'} + a_{n'+1} + \ldots + a_{n''} + a_{n''+1} + \ldots,$$

$$\sum a_x a_{x'} = a_n . a_{n+1} + a_n . a_{n+2} + \ldots + a_{n+1} . a_{n+2} + \ldots,$$

c'est-à-dire que le signe $\sum$ représente successivement la somme des seconds termes, la somme de leurs produits différents, 2 à 2, 3 à 3, etc. Or, il résulte des principes de la numération décimale que

$$1 + \sum a_x = X, \quad \text{donc} \quad P > X.$$

Toutefois, si l'on fait abstraction dans X et dans P des zéros qui suivent immédiatement la virgule, et qui appartiennent également à ces deux nombres, on reconnaît que leurs n premiers chiffres sont communs, ou que la différence est au plus d'une unité sur le $n^{\text{ième}}$ chiffre. En effet,

$$\sum a_x a_{x'} < (a_n + a_{n+1} + \ldots)(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots);$$

$$a_n + a_{n+1} + \ldots < \frac{1}{10^{n-1}}, \quad a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < \frac{1}{10^n}.$$

Par suite,

$$\sum a_x a_{x'} < \frac{1}{10^{2n-1}} \quad \text{ou} \quad 1_{2n-1}.$$

Les autres termes de la série qui exprime P décroissent très-rapidement, et ne peuvent pas même fournir un chiffre de l'ordre $3n$. Les n premiers chiffres de X et de P seront donc communs, si

$$a_n a_{n+1} + a_{2n} < 1_{2n-1},$$

et la différence sera d'une unité sur le $n^{ième}$ chiffre, si

$$a_n a_{n+1} + a_{2n} = 1_{2n-1} + \mathcal{E}_{2n}.$$

Cela posé, cherchons de quelle manière devrait être formé un nombre X_1, analogue à X, mais plus petit que X, pour qu'en déduisant de ce nombre des facteurs analogues à ceux de P, on reproduise X. J'appelle α les seconds chiffres de ces facteurs, afin de les distinguer de ceux de P; d'ailleurs α représente, comme a, un des caractères de la numération, non spécialement défini. J'ai

$$\begin{aligned} X &= (1 + \alpha_n)\ldots(1 + \alpha_{n'})\ldots(1 + \alpha_{n''})\ldots \\ &= 1 + \sum \alpha_x + \sum \alpha_x \alpha_{x'} + \sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''} + \ldots \\ &= X_1 + \sum \alpha_x \alpha_{x'} + \sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''} + \ldots, \end{aligned}$$

en sorte que

$$X_1 = X - \sum \alpha_x \alpha_{x'} - \sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''} - \ldots.$$

D'après ce qui a été démontré plus haut, les n premiers chiffres de X, après les zéros, entreront dans X_1, si

$$a_n a_{n+1} + a_{2n} < 1_{2n-1},$$

et le $n^{ième}$ chiffre de X_1 sera moindre d'une unité que celui de X, si

$$a_n a_{n+1} + a_{2n} \overset{=}{>} 1_{2n-1}.$$

Cette vérification pouvant être faite à simple vue, j'admets que l'on connaît exactement les n premiers chiffres de X_1, c'est-à-dire la composition de X_1 jusqu'à l'ordre décimal $2n - 1$. Il est facile alors de calculer la partie de la série qui comprend exclusivement ces n chiffres. On n'aura d'ailleurs égard qu'au terme $\sum \alpha_x \alpha_{x'}$, attendu que les termes suivants donneraient des produits en dehors du premier ordre d'approximation que l'on peut obtenir. On écrira ainsi

$$\sum \alpha_n \alpha_{n'} = \sum_{n}^{2n-2} \alpha_x \sum_{n+1}^{2n-1} \alpha_{x'} + \sum_{n}^{\omega-1} \alpha_x \sum_{2n}^{\omega} \alpha_{x'}.$$

Le symbole $\sum\limits_{p}^{q} \alpha_x$ veut dire que l'on doit donner successivement à l'indice x toutes les valeurs entières depuis p jusqu'à q, et faire la somme des α_x qui en résultent. ω représente ici pour nous l'ordre décimal du dernier terme de X_1.

En retranchant de X, $\sum\limits_{n}^{2n-2} \alpha_x \sum\limits_{n+1}^{2n-1} \alpha_{x'}$ que l'on peut exactement calculer, on aura X_1 avec une erreur exprimée par

$$\sum_{n}^{\omega-1} \alpha_x \sum_{2n}^{\omega} \alpha_{x'} + \sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''} + \ldots < 1_{2n-2}.$$

Par suite, $n - 1$ nouveaux chiffres de X_1 seront exactement déterminés, et ils serviront à calculer une nouvelle partie du reste de la série qui, retranchée du reste de X, donnera encore $n - 1$ nouveaux chiffres de X_1.

Il est évident que l'opération peut être indéfiniment continuée, et que l'on arrivera de cette manière à déterminer X_1, et, par suite, les facteurs cherchés, avec toute l'approximation que l'on croira devoir rechercher. Pour un ordre d'approximation déterminé, le nombre des opérations sera d'autant moindre que n sera plus grand, c'est-à-dire que, dans le nombre fractionnaire, l'unité sera suivie d'un plus grand nombre de zéros.

Appliquons ce procédé au nombre dont nous avons déjà cherché le logarithme par les procédés de Briggs et de R. Flower.

$N = 2966{,}82051\ 456$ $D = 2966$

$X = 1{,}00027\ 66401\ 0789$
$\phantom{X = 1{,}00027\ 66}157\ 8560$
$1{,}00027\ 66243\ 2229$
$\phantom{1{,}00027\ 66243\ 2}681$
$X_2 = 1{,}00027\ 66243\ 1548$

	5932
3200	22731
2966	20762
23400	1969 4
20762	1779 6
26380	189 85
23728	177 96
26520	11896
	11864
	32
$\sum_4^6 \alpha_x \sum_5^7 \alpha_{x'}$	153 2
	4 62
	36
1re corr.	0^7 157 856
$\sum_4^9 \alpha_x \sum_8^{10} \alpha_{x'}$	04860
	1701
	146
	15
$\sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''}$	84
	8
2e corr.	0^{11} 6814

NOMBRES.	LOGARITHMES.
2966	3,47217 11466 92360
1,0002	8 68502 11649
$1{,}0^4\,7$	3 03995 49761
$1{,}0^5\,6$	26057 59074
$1{,}0^6\,6$	2605 76611
$1{,}0^7\,2$	86 85890
$1{,}0^8\,4$	17 37178
$1{,}0^9\,3$	1 30288
$1{,}0^{10}\,1$	4343
$1{,}0^{11}\,5$	2171
$1{,}0^{12}\,4$	174
$1{,}0^{13}\,8$	35
Log 2966,82051 456 =	3,47229 12733 4953

Le dernier procédé me paraît d'une application plus sûre et moins laborieuse que les deux autres, mais il exige qu'indépendamment de la table des logarithmes des facteurs binômes on possède une table des logarithmes des nombres premiers compris dans les neuf premières chiliades. Cette dernière table, calculée sous la direction de Prony, avec dix-neuf décimales exactes, n'a reçu malheureusement qu'une publicité bien incomplète. On ne la trouve, à ma connaissance, que dans les deux manuscrits originaux des *Tables du Cadastre*, et dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre. J'ai cru qu'il serait utile d'en faire une publication spéciale, que l'on pourrait acquérir à un prix modique, et de l'accompagner d'une table des facteurs premiers des nombres compris entre 0 et 10000. La Note actuelle est en quelque sorte la préface de cette publication.

Retour des logarithmes aux nombres.

Pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire pour opérer le retour des logarithmes aux nombres, on retranche successivement, du logarithme du nombre, les logarithmes des facteurs dans lesquels ce nombre peut être décomposé à l'aide des tables; puis on effectue le produit de ces facteurs. La première table à dix-neuf décimales ne contenant que les logarithmes des nombres premiers de 1 à 10000, on s'aidera d'une table à quatre ou cinq décimales pour obtenir immédiatement les quatre premiers chiffres du nombre cherché, c'est-à-dire la quantité que nous avons appelée D précédemment. On décomposera D en ses facteurs premiers, et on en conclura son logarithme dans l'ordre d'approximation fixé.

Ce logarithme retranché du logarithme donné fournira un reste dont on soustraira successivement les logarithmes des facteurs binômes les plus approchés, jusqu'à ce que l'on arrive à un reste négligeable. Il ne restera plus ensuite qu'à effectuer le produit des facteurs obtenus.

Soit

$$\log N = 3,47229\,12733\,4953.$$

La table à quatre ou cinq décimales fait connaître que le nombre de quatre chiffres le plus voisin de N, en moins, est 2966. Conséquemment

$$D = 2966 = 2\cdot 1483$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,30102\ 99956\ 6398 \\ \log 1483 &= 3,17114\ 11510\ 2838 \\ \hline \log D &= 3,47217\ 11466\ 9236 \end{aligned}$$

Le calcul se dispose alors comme il suit :

LOGARITHMES.	FACTEURS.	PRODUITS.
3,47229 12733 49530		
3,47217 11466 92360	2966 (1)	(6)à(12) 1,00000 00243 15470
12 01266 57170		(5) 6000 00014
8 68502 11649	1,0002 (2)	1,00000 06243 15484
3 32764 45521		(4) 60000 3746
3 03995 49761	$1,0^{4}\,7$ (3)	1,00000 66243 19230
28768 95760		(3) 7 00004 63702
26057 59074	$1,0^{5}\,6$ (4)	1,00007 66247 82932
2711 36686		(2) 20 00153 24957
2605 76611	$1,0^{6}\,6$ (5)	1,00027 66401 07889
105 60075		(1) 2966
86 85890	$1,0^{7}\,2$ (6)	2966, 165 98406 47334
18 74185		1659 84064 7334
17 37178	$1,0^{8}\,4$ (7)	24897 60971 001
1 37007		55328 02157 78
1 30288	$1,0^{9}\,3$ (8)	IV 2966,82051 45599 98774
6719		
4343	$1,0^{10}\,1$ (9)	
2376		
2171	$1,0^{11}\,5$ (10)	
205		
174	$1,0^{12}\,4$ (11)	
31		
30	$1,0^{13}\,7$ (12)	
1		

On voit que, dans l'ordre d'approximation fixé, le produit des facteurs de (6) à (12) peut être immédiatement écrit.

Il est évident que l'on peut appliquer au calcul du produit des facteurs le procédé que nous avons déjà exposé. On corrigerait le nombre 1,00027 66243 1547 que fournissent les seconds termes des facteurs binômes, au moyen de la série

$$\sum \alpha_x \alpha_{x'} + \sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''} + \ldots,$$

mais ici les corrections seraient additives.

$X_1 =$	1,00027 66243 1547
1re corr. $+$	157 8560
	1,00027 66401 0107
2e corr. $+$	681
$X =$	1,00027 66401 0788

$\sum_4^6 \alpha_x \sum_5^7 \alpha_{x'}$	153 2
	4 62
	36
1re corr.	157 856
$\sum_4^9 \alpha_x \sum_8^{10} \alpha_{x'}$	4860
	1701
	146
	15
$\sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''}$	84
	8
2e corr.	6814

Le reste du calcul s'achèverait en multipliant X par D.