Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 323-333

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__323_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 447

(voir t. XVII, p. 358);

PAR MM. BERQUET ET JOUFFRAY,
Élèves du lycée de Lyon.

Soient

$$x_1 = p^{\frac{1}{2}},$$

$$x_2 = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_3 = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

p et q sont supérieurs à zéro. Démontrer que :

1° *Les termes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vont en croissant;*

2° *$x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p$ est une quantité positive;*

3° *$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1}$ n'est pas inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}(2p)^{\frac{n-2}{2}}$;*

4° $x_n - x_{n-1} < \dfrac{1}{2^{(2n-2)\frac{1}{4}}} \left(\dfrac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-2}{4}}$.

(GRUNERT.)

1° Si nous considérons la suite des termes $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots, x_n^2$, nous voyons qu'ils vont en croissant, puisque pour les avoir on ajoute à x_1^2 des quantités de plus en plus grandes. La suite $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sera donc formée de termes croissants.

2° Nous avons

$$x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p = \sqrt{p^2 + qx_{n-1}} + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}},$$

qui est évidemment une quantité positive, comme somme de deux quantités positives.

3° Si nous effectuons le produit $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-2}$, il vient

$$p^{\frac{1}{2}} \left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(p + \sqrt{p^2 + qx_2}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si nous diminuons cette expression et que nous prouvions que la nouvelle quantité n'est pas inférieure à

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (2p)^{\frac{n-2}{2}},$$

la proposition sera démontrée.

Or, si nous supprimons qx_1, $qx_2, \ldots$, qx_{n-3} sous les radicaux, l'expression devient

$$p^{\frac{1}{2}} (2p)^{\frac{n-3}{2}},$$

que nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (2p)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Mais l'expression $x_1 x_2 \ldots x_{n-2}$ n'est jamais inférieure à cette quantité et pourra lui être égale dans le cas où l'on fait $n - 2 = 1$, car alors le produit $x_1 x_2 \ldots x_{n-2}$ se réduit à $p^{\frac{1}{2}}$, et si dans l'expression donnée on fait $n = 3$, il reste $p^{\frac{1}{2}}$. La troisième partie de l'énoncé se trouve donc ainsi établie.

4° Pour démontrer cette quatrième proposition, nous ferons voir d'abord qu'elle est vraie pour $n = 2$; dans ce cas, on a

$$x_2 - x_1 = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}} - (p)^{\frac{1}{2}},$$

et il faut montrer que l'on a

$$\left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}.$$

Élevant au carré les deux membres, il vient, toutes réductions faites,

$$\left(p^2 + q\sqrt{p}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(p^2 + q\sqrt{p}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{p^2 + q\sqrt{p}}{4p},$$

inégalité qui est évidente.

Nous allons maintenant démontrer que la proposition étant vraie pour $n-1$, elle le sera pour n; à cet effet, nous prenons le rapport

$$\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}.$$

Si nous démontrons que ce rapport est plus grand que le rapport des seconds membres correspondants, comme on suppose que l'on a

$$x_{n-1} - x_{n-2} < \frac{1}{2^{(2n-4)\frac{1}{4}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-3}{4}},$$

on en conclura l'inégalité

$$x_n - x_{n-1} < \frac{1}{2^{(2n-2)\frac{1}{4}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-2}{4}}.$$

Calculons

$$\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}.$$

On a

$$x_n^2 = p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}},$$
$$x_{n-1}^2 = p + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}$$

et

$$(x_n^2 - p)^2 = p^2 + qx_{n-1},$$
$$(x_{n-1}^2 - p)^2 = p^2 + qx_{n-2};$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$(x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p)(x_n^2 - x_{n-1}^2) = q(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

On en déduit donc

$$\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{q}\left(\sqrt{p^2 + qx_{n-1}} + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}\right)$$
$$\times\left[\left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

La question se trouve donc ramenée à prouver que l'on a

$$\frac{1}{q}\left(\sqrt{p^2 + qx_{n-1}} + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}\right)$$
$$\times\left[\left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$> 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

inégalité qui sera évidemment remplie si l'on a

$$\frac{4}{q}\sqrt{p^2 + q\sqrt{p}}\left(p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

ou

$$\frac{16}{q^2}\left(p^2 + q\sqrt{p}\right)\left(p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{p}}\right) > 2\left(\frac{8p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette dernière condition est toujours remplie, car en effectuant le produit dans le premier membre, on a

$$\frac{16}{q^2}\left(qp.\sqrt{p}+\ldots\right) > 2\left(\frac{8p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

les points dans la parenthèse remplaçant des termes tous positifs. Le premier terme seul étant plus grand que le deuxième membre, l'inégalité sera satisfaite, et l'on a

$$x_n - x_{n-1} < \frac{1}{2^{(2n-2)\frac{1}{4}}}\left(\frac{p^2+q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-2}{4}},$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

Question 547;

(voir t. XIX, p. 405);

PAR M. DRIANT,
Élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout).

Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle des neuf points, multiplié par le produit des distances de ce centre aux côtés du triangle, et divisé par le produit des distances de ce centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle. (FAURE.)

Je prends pour axes deux côtés du triangle donné; soient a et c les longueurs respectives de ces côtés et θ leur angle. L'équation d'une conique circonscrite sera

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 - Aax - Ccy = 0.$$

Pour calculer la somme des carrés des axes de cette conique, je vais la couper par un cercle ayant même centre que la conique, et en exprimant que ce cercle est bitangent à la conique, j'obtiendrai une équation du second degré en R^2 dont les racines seront les carrés des demi-axes.

Les coordonnées x_1, y_1 du centre de la conique sont

$$x_1 = \frac{C(Bc - 2Aa)}{B^2 - 4AC}, \quad y_1 = \frac{A(Ba - 2Cc)}{B^2 - 4AC}.$$

Si on transporte l'origine en ce point, l'équation de la conique devient

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \frac{AC(Cc^2 + Aa^2 - Bac)}{B^2 - 4AC} = 0.$$

L'équation d'un cercle concentrique est

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - R^2 = 0.$$

L'équation de l'ensemble de deux droites passant par l'intersection de ces deux courbes est

$$(AR^2 + \alpha)x^2 + (BR^2 + 2\alpha\cos\theta)xy + (CR^2 + \alpha)y^2 = 0,$$

en posant

$$\alpha = \frac{AC(Cc^2 + Aa^2 - Bac)}{B^2 - 4AC}.$$

Pour que ces deux droites se confondent, on doit avoir

$$R^4(B^2 - 4AC) - 4R^2(A + C - B\cos\theta)\alpha + \ldots = 0.$$

La somme des carrés des demi-axes est donc

$$(1) \qquad 4AC\frac{(Aa^2 + Cc^2 - Bac)}{(B^2 - 4AC)^2}(A + C - B\cos\theta).$$

Le produit des distances du centre aux trois côtés du triangle est

$$\frac{x_1 y_1\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{c} - 1\right)\sin^3\theta}{\pm\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{ac}\cos\theta}}.$$

Le produit des distances du centre de la conique aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle a pour expression

$$\frac{\left(\frac{c}{2}-y_1\right)\left(\frac{a}{2}-x_1\right)\left(\frac{2x_1}{a}+\frac{2y_1}{c}-1\right)\sin^3\theta}{\pm 2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{ac}\cos\theta}}.$$

Le rapport de ces deux produits est

$$\frac{8x_1y_1(cx_1+ay_1-ac)}{(c-2y_1)(a-2x_1)(2cx_1+2ay_1-ac)}.$$

Si on remplace dans cette expression x_1 et y_1 par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 8AC(Bc-2Aa)(Ba-2Cc) \\ \times[Cc(Bc-2Aa)+Aa(Ba-2Cc)-ac(B^2-4AC)]\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} [c(B^2-4AC)-2A(Ba-2Cc)] \\ \times[a(B^2-4AC)-2C(Bc-2Aa)] \\ \times[2Cc(Bc-2Aa)+2Aa(Ba-2Cc)-ac(B^2-4AC)]\end{array}\right\}},$$

ce qui se réduit à

$$(2)\qquad \frac{8AC(Cc^2+Aa^2-Bac)}{B[2B(Cc^2+Aa^2)-ac(B^2+4AC)]}.$$

Il reste à calculer la puissance du centre de la conique par rapport au cercle des neuf points du triangle; l'équation de ce cercle est

$$x^2+y^2+2xy.\cos\theta-\left(\frac{a}{2}+c.\cos\theta\right)x$$
$$-\left(\frac{c}{2}+a.\cos\theta\right)y+\frac{ac.\cos\theta}{2}=0.$$

La puissance cherchée est donc

$$x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta$$
$$-\left(\frac{a}{2}+c\cos\theta\right)x_1-\left(\frac{c}{2}+a\cos\theta\right)y_1+\frac{ac.\cos\theta}{2}\mp 0.$$

Si on remplace x_1 et y_1 par leurs valeurs, on a une expression dont le dénominateur est

$$(B^2 - 4AC)^2,$$

et le numérateur est

$$\begin{aligned}
&C^2(Bc - 2Aa)^2 + A^2(Ba - 2Cc)^2 \\
&\quad + 2\cos\theta . AC(Bc - 2Aa)(Ba - 2Cc) \\
&\quad - (B^2 - 4AC)\Big[A(Ba - 2Cc)\left(\frac{c}{2} + a\cos\theta\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + C(Bc + 2Aa)\left(\frac{a}{2} + c\cos\theta\right)\Big] \\
&\quad + \frac{ac\cos\theta}{2}(B^2 - 4AC)^2,
\end{aligned}$$

ce qui devient, en développant,

$$\begin{aligned}
&B^2(C^2c^2 + A^2a^2) + 4A^2C^2(a^2 + c^2) - 4ABC(A + C)ac \\
&\quad + 2B^2AC\cos\theta . ac - 4ABC\cos\theta(Aa^2 + Cc^2) + 8A^2C^2ac\cos\theta \\
&\quad - \frac{(B^2 - 4AC)}{2}[Ac(Ba - 2Cc) + 2Cc\cos\theta(Bc - Aa) \\
&\qquad\qquad + 2Aa\cos\theta(Ba - 2Cc) + Ca(Bc - 2Aa)] \\
&\quad + \frac{B^4ac\cos\theta}{2} - 4B^2AC\cos\theta . ac + 8A^2C^2ac\cos\theta.
\end{aligned}$$

Cette expression peut s'écrire en divisant tout par B :

$$\begin{aligned}
&B(C^2c^2 + A^2a^2) - 2AC(A + C)ac + 2BACac.\cos\theta \\
&\quad + \frac{B^3ac\cos\theta}{2} - \frac{B^2ac(A + C)}{2} \\
&\quad + BAC(a^2 + c^2) - B^2(Cc^2 + Aa^2)\cos\theta,
\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&-\frac{A + C}{2}(B^2 + 4AC)ac - \frac{B\cos\theta}{2}[2B(Cc^2 + Aa^2)] \\
&\quad + \frac{ac\cos\theta B}{2}(B^2 + 4AC) + \frac{2B(A + C)(Aa^2 + Cc^2)}{2}.
\end{aligned}$$

La puissance du centre de la conique par rapport au cercle des neuf points est donc

$$(3)\quad \frac{B(A+C-B\cos\theta)\times[2B(Aa^2+Cc^2)-ac(B^2+4AC)]}{2(B^2-4AC)^2}.$$

Si on fait le produit des équations (2) et (3), on obtient pour résultat l'équation (1). C. Q. F. D.

Question 796;

PAR M. MUZEAU,
Lieutenant d'artillerie.

On propose de démontrer que la circonférence de l'ellipse, dont les axes sont $2a$ *et* $2b$, *est égale à la circonférence du cercle dont le rayon* R *est déterminé par la formule*

$$4R = \sqrt{a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})} + \sqrt{a^2(2-\sqrt{2})+b^2(2+\sqrt{2})},$$

en négligeant seulement la huitième puissance de l'excentricité, et l'on demande de construire R.

(HERMITE.)

$$\sqrt{a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2(a^2+b^2)+\sqrt{2}(a^2-b^2)}$$

ou, en posant $a^2-b^2=a^2e^2$,

$$\sqrt{a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})}$$
$$= \sqrt{2a^2+2a^2-2a^2e^2+\sqrt{2}\,a^2e^2}$$
$$= a\sqrt{4-e^2(2-\sqrt{2})} = 2a\sqrt{1-e^2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$= 2a\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{e^2\left(2-\sqrt{2}\right)}{4} - \frac{1.1}{2.4}\,\frac{e^4\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{16}\right.$$

$$- \frac{1.1.3}{2.4.6}\,\frac{e^6\left(2-\sqrt{2}\right)^3}{64}$$

$$\left. - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\,\frac{e^8\left(2-\sqrt{2}\right)^4}{256} - \ldots\right].$$

On a de même

$$\sqrt{a^2\left(2-\sqrt{2}\right) + b^2\left(2+\sqrt{2}\right)} = 2a\sqrt{1 - e^2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$= 2a\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{e^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4} - \frac{1.1}{2.4}\,\frac{e^4\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{16}\right.$$

$$- \frac{1.1.3}{2.4.6}\,\frac{e^6\left(2+\sqrt{2}\right)^3}{64}$$

$$\left. - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\,\frac{e^8\left(2+\sqrt{2}\right)^4}{256} - \ldots\right].$$

En négligeant la huitième puissance de l'excentricité, on a donc

$$4R = 4a\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2\right],$$

$$2\pi R = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2\right];$$

le second membre de la dernière égalité est, en négligeant seulement la huitième puissance de l'excentricité, la mesure de la circonférence de l'ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$.

Note. — M. Muzeau fait suivre ce calcul d'une construction de R assez compliquée. Mais il en existe une plus simple, conséquence d'un théorème dû à Bernoulli. Soient $AC = AB + BC = a + b$ le diamètre d'un cercle, ADEFC le demi-octogone regulier inscrit dans ce cercle, on aura

$$R = \frac{BD + BF}{2}.$$

On aura ainsi une valeur approchée par excès de la circonférence de l'ellipse (voir *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 346, et t. XXIII, p. 403).

Autres solutions par MM. Lucien Bignon, de Lima, et Th. Willière, de Thuin.