NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HOUSEL

Note sur la simplification et la vérification des calculs relatifs au théorème de Sturm (voir p. 240)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 351-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__351_0>

NOTE SUR LA SIMPLIFICATION ET LA VÉRIFICATION DES CALCULS RELATIFS AU THÉORÈME DE STURM

(voir p. 240),

PAR M. HOUSEL.

Si l'on substitue des unités dans l'équation proposée par Sturm

$$X = 10x^4 - 5x^3 - 76x^2 + 58x - 11 = 0,$$

on voit d'abord qu'il y a une racine négative comprise entre -2 et -3 : on reconnaît même qu'il n'y en a pas d'autre; car, si l'on change x en $-x$, l'équation se divise en deux parties consécutives de signe différent.

On observe aussi qu'il y a une racine positive entre 2 et 3. Quant aux deux autres, on peut en soupçonner la réalité à cause du théorème de Rolle, car l'équation dérivée

$$X' = 40x^3 - 15x^2 - 152x + 58 = 0$$

a une racine comprise entre 0 et 1; or, si les quatre racines de $X = 0$ sont réelles, on sait que les deux dernières sont aux environs de cette valeur; mais le théorème de Sturm peut seul montrer d'avance qu'en effet ces racines existent, et même qu'elles sont aussi comprises entre 0 et 1.

Cependant la substitution des dixièmes, des centièmes et même des millièmes ne suffit pas pour les séparer. Mais comme on s'aperçoit que les valeurs de X sont plus petites pour $x = 0,38$ et $x = 0,382$ qui donnent successivement

$$X = -0,0002464 \quad \text{et} \quad X = -0,00000070224,$$

on voit que c'est aux environs de ces valeurs qu'il faudra substituer d'abord des millièmes, puis des dix-millièmes.

En effet,

$$x = 0,3819$$

donne

$$X = 0,0000010069 51376.$$

On trouvera de même que l'autre racine est comprise entre 0,3817 et 0,3818.

Du reste, cette équation en particulier est facile à résoudre si l'on songe à décomposer le polynôme du quatrième degré en facteurs rationnels du second; on a alors

$$\begin{aligned} &10x^4 - 5x^3 - 762^2 + 58x - 11 \\ &\quad = (x^2 - 3x + 1)(10x^2 + 25x - 11), \end{aligned}$$

ce qui donne les quatre racines

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,61803, & x_2 &= 0,38196, \\ x_3 &= 0,38172, & x_4 &= -2,88172. \end{aligned}$$

Pour venir à l'objet de cette Note, observons que la meilleure réponse à faire aux objections sur la difficulté des calculs qu'entraîne la méthode de Sturm consiste assurément à donner un moyen de les simplifier, et surtout de les vérifier.

Voici comment y parvenait feu M. Binet, professeur au collége Bourbon, actuellement lycée Bonaparte. Il suffit de démontrer le théorème suivant :

Si l'on divise un polynôme

$$A = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \ldots$$

par un autre polynôme

$$B = a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + c'x^{m-3} + d'x^{m-4} + \ldots,$$

dont le degré est inférieur d'une unité, le facteur a'^2, *que l'on introduit pour faciliter la division, se retrouve dans le second reste* R′ *obtenu en divisant* B *par le premier reste* R.

En faisant la division indiquée par

$$a'^2 A = BQ + R,$$

on trouve

$$Q = aa'x + a'b - ab';$$

soit

$$R = a''x^{m-2} + b''x^{m-3} + \ldots,$$

on a aussi

$$a'' = a'(a'c - ac') - b'(a'b - ab')$$

et

$$b'' = a'(a'd - ad') - c'(a'b - ab').$$

La seconde division est indiquée par

$$a''^2 B = Q'R + R'$$

en posant

$$Q' = a'a''x + a''b' - a'b''.$$

On a

$$R' = a''^2 B - Q'R = -a'^2 Q'A + B(a''^2 + QQ').$$

Par conséquent, le théorème de M. Binet sera démontré si l'on fait voir que $a''^2 + QQ'$ est divisible par a'^2. Or, on a

$$\begin{aligned} a''^2 + QQ' = {} & [a'(a'c - ac') - b'(a'b - ab')]^2 \\ & + (aa'x + a'b - ab')(a'a''x + a''b' - a'b''). \end{aligned}$$

En développant le second membre, nous laisserons de côté les termes où se trouve le facteur a'^2, tels que

$$a'^2(a'c - ac')^2 \quad \text{et} \quad a'^2x^2.aa''.$$

Les termes en x seront

$$a'x[a(a''b' - a'b'') + a''(a'b - ab')];$$

on pourra aussi les mettre de côté, puisque ceux qui ne contiennent pas a'^2 se détruisent. Il reste donc, en supprimant encore le facteur commun $a'b - ab'$, la quantité

$$b'^2(a'b - ab') - 2a'b'(a'c - ac') + a''b' - a'b''.$$

Dans $a''b' - a'b''$, supprimant encore

$$-a'^2(a'd - ad'),$$

il reste

$$\begin{aligned}&b'^2(a'b - ab') - 2a'b'(a'c - ac') + a'b'(a'c - ac')\\&\quad - b'^2(a'b - ab') + a'c'(a'b - ab'),\end{aligned}$$

ce qui revient à

$$-a'b'(a'c - ac') + a'c'(a'b - ab') = a'^2(bc' - b'c).$$

On voit enfin que R' est divisible par a'^2.

Comme a' et a'' n'ont point, en général, de facteur commun, la suppression du facteur a'^2 dans R' n'empêchera pas R'' d'être divisible par a''^2.

Ce théorème est toujours vrai, même quand B n'est pas la dérivée de A. Du reste, voici, dans l'exemple cité, les polynômes de Sturm, simplifiés par le théorème de M. Binet :

$$\begin{aligned}X &= 10x^4 - 5x^3 - 76x^2 + 58x - 11,\\X' &= 40x^3 - 15x^2 - 152x + 58,\\X_1 &= 1231x^2 - 1240x + 294,\\X_2 &= 6443876x - 2460539 \text{ (après division par } 32 = 2.4^2),\\X_3 &= 1065 \text{ (après division par } 1515361 = (1231)^2.\end{aligned}$$