

A. LAISANT

**Note sur la somme des n premiers produits
de p nombres entiers consécutifs**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6
(1867), p. 366-367

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6_366_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA SOMME DES n PREMIERS PRODUITS
DE p NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS;**

PAR M. A. LAISANT,
Officier du génie.

Considérons les produits

$$1 \cdot 2 \dots p, \quad 2 \cdot 3 \dots (p+1), \quad 3 \cdot 4 \dots (p+2), \dots, \\ n(n+1)(n+p-1).$$

Il s'agit de trouver une formule donnant la somme de tous ces termes.

Considérant d'abord les deux premiers, nous avons

$$1 \cdot 2 \dots p + 2 \cdot 3 \dots (p+1) \\ = 2 \cdot 3 \dots (p+1) \left(\frac{1}{p+1} + 1 \right) = \frac{2 \cdot 3 \dots (p+1)(p+2)}{(p+1)}.$$

La somme des trois premiers produits s'obtiendra en ajoutant le troisième produit à la somme précédente. Ainsi nous aurons

$$\begin{aligned} & 1.2\dots p + 2.3\dots(p+1) + 3.4\dots(p+2) \\ &= \frac{2.3\dots(p+1)(p+2)}{(p+1)} + 3.4\dots(p+2) \\ &= 3.4\dots(p+2) \left(\frac{2}{p+1} + 1 \right) = \frac{3.4\dots(p+2)(p+3)}{p+1}. \end{aligned}$$

On verrait de même que la somme des quatre premiers produits est $\frac{4.5.6\dots(p+4)}{p+1}$; celle des cinq premiers, $\frac{5.6\dots(p+5)}{p+1}$. En général, il suffira, pour obtenir la somme demandée, d'ajouter au terme auquel on s'arrête un nouveau facteur, en suivant l'ordre consécutif des nombres entiers, et de diviser par $(p+1)$. Pour faire ressortir la généralité de cette loi, supposons-la vraie pour la somme des $(n-1)$ premiers termes, et nous l'établirons pour celle des n premiers.

Ainsi, par hypothèse,

$$\begin{aligned} & 1.2\dots p + \dots + (n-1)n(n+1)\dots(n+p-2) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)\dots(n+p-1)}{p+1}; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & 1.2\dots p + \dots + (n-1)n\dots(n+p-2) \\ & \quad + n(n+1)\dots(n+p-1) \\ &= n(n+1)\dots(n+p-1) \left(\frac{n-1}{p+1} + 1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)\dots(n+p)}{p+1}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que la formule est générale (*).

(*) Un calcul semblable donne la limite de la somme des termes de la