NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. ANNEQUIN

J. MOREL

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale supérieure (année 1866)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 420-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__420_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE
au Concours d'admission à l'École Normale supérieure (année 1866)

(voir p. 45) ;

PAR MM. A. ANNEQUIN ET J. MOREL,
Elèves du lycée de Grenoble.

Dans une ellipse donnée, on inscrit un parallélogramme ayant pour diagonales deux diamètres conjugués quelconques AA′, BB′.

Aux sommets de ce parallélogramme, on mène les normales à l'ellipse; ces normales forment un second parallélogramme MNM′N′.

1° *Démontrer que les diagonales de chacun des parallélogrammes* ABA′B′, MNM′N′ *sont respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre.*

2° *Trouver le lieu des sommets du parallélogramme* MNM′N′, *quand on fait varier les diamètres conjugués.*

3° *Trouver le lieu du point d'intersection de la diagonale* NN′ *et de la tangente en* M *au lieu précédent* (*).

1° Les côtés BM′, B′M du parallélogramme MNM′N′

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

sont perpendiculaires à la diagonale AA′, puisque les diamètres AA′, BB′ étant conjugués les tangentes en B et en B′ sont parallèles à AA′. Pour une même raison, A′M et AM′ sont perpendiculaires à la diagonale BB′.

La diagonale N′N est perpendiculaire à AB′ et à BA′, car, par raison de symétrie, cette droite passe par le centre O de l'ellipse, et elle est la troisième hauteur du triangle BOA′ puisqu'elle passe par le point N d'intersection des deux autres hauteurs. Cette droite est donc perpendiculaire à A′B et à AB′. Pour une même raison MM′ est perpendiculaire à AB et à A′B′.

2° L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, les équations des normales aux points A et B seront

$$(1)\qquad y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}},$$

$$(2)\qquad y = m'x \pm \frac{c^2 m'}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}}.$$

Ces normales étant perpendiculaires à deux diamètres conjugués, nous aurons

$$\frac{1}{mm'} = -\frac{b^2}{a^2},$$

d'où

$$m' = -\frac{a^2}{b^2 m}.$$

Substituant dans l'équation (2), nous aurons, après simplification,

$$\frac{y - mx}{b^2 my + a^2 x} = \pm \frac{1}{ab}.$$

Comme dans l'équation finale a et b n'entrent que par leurs carrés, il suffit de prendre un des signes, le signe +

par exemple. Nous aurons donc

$$m = \frac{a[by - ax]}{b[by + ax]}.$$

Substituant dans l'équation (1), qui revient à

$$[y - mx]^2 = \frac{c^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2},$$

nous aurons

$$\frac{[b^2y^2 + a^2x^2]^2}{[by + ax]^2} = \frac{c^4[by - ax]^2}{2[b^2y^2 + a^2x^2]};$$

chassons les dénominateurs, il vient

$$2[b^2y^2 + a^2x^2]^3 = c^4[b^2y^2 - a^2x^2]^2.$$

Telle est l'équation du lieu.

Pour avoir aisément la forme du lieu représenté par cette équation, nous transformerons les coordonnées rectilignes en coordonnées polaires, et nous aurons

$$\rho^2 = \frac{c^4[b^2\sin^2\omega - a^2\cos^2\omega]^2}{2[b^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega]^3}.$$

Cette équation représente une rosace à quatre feuilles. Ce lieu est symétrique par rapport aux axes de coordonnées OX et OY.

3° Soient x', y' les coordonnées du point M où l'on mène la tangente. Le coefficient angulaire de OM est $\frac{y'}{x'}$. Entre les coefficients angulaires m et m' de OM et de ON nous avons la relation

$$\frac{1}{mm'} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

L'équation de ON sera donc

$$(1) \qquad y = -\frac{a^2x'}{b^2y'}x;$$

l'équation de la tangente en M (x', y') sera

$$(2)\quad y - y' = -\frac{6a^2x'[b^2y'^2 + a^2x'^2]^2 + 2c^4a^2x'[b^2y'^2 - a^2x'^2]}{6b^2y'[b^2y'^2 + a^2x'^2]^2 - 2c^4b^2y'[b^2y'^2 - a^2x'^2]}(x - x').$$

Nous avons en outre :

$$(3)\qquad 2[b^2y'^2 + a^2x'^2]^3 = c^4[b^2y'^2 - a^2x'^2]^2.$$

En chassant le dénominateur, effectuant les réductions en ayant égard aux équations (1) et (3), l'équation (2) deviendra

$$(4)\qquad b^2y'^2 - a^2x'^2 = -4b^2yy'.$$

Les équations (1) et (4) donnent, en supprimant la solution $x' = 0$, $y' = 0$ qui ne convient pas,

$$y' = \frac{4a^2x^2y}{b^2y^2 - a^2x^2}, \quad x' = -\frac{4b^2y^2x}{b^2y^2 - a^2x^2}.$$

Substituant dans l'équation (3), nous avons l'équation du lieu

$$32a^2b^2x^2y^2[a^2x^2 + b^2y^2]^3 = c^4[a^2x^2 - b^2y^2]^4.$$

Pour trouver aisément la forme de la courbe, nous transformerons en coordonnées polaires, et nous aurons

$$\rho^2 = \frac{c^4[a^2\cos^2\omega - b^2\sin^2\omega]^4}{32a^2b^2[a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega]^3\sin^2\omega\cos^2\omega}.$$

Le lieu est symétrique par rapport aux axes OX et OY et présente huit branches infinies asymptotes aux axes de coordonnées.

Note. — Autre solution d'un Professeur anonyme.