Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 427-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__427_1>

CORRESPONDANCE.

1. *Lettre de M. Duhamel, Membre de l'Institut.* — « Dans un des derniers numéros de votre utile journal, se trouve un article de M. Prouhet concernant le célèbre théorème de Sturm sur les équations. L'origine qu'il suppose à cette découverte n'est pas la même que celle que j'ai indiquée dans un de mes ouvrages, et dont je suis certain, puisque c'est de Sturm lui-même que je la tiens. Je n'insisterais pas sur ce point, si la marche suivie par cet illustre géomètre n'était pas la plus simple, la plus naturelle et la plus en rapport avec la nature de son génie.

Il est donc, jusqu'à un certain point, dans l'intérêt de sa gloire que je fasse connaître les quelques mots qu'il m'a dits autrefois à ce sujet; comme aussi, il est dans l'intérêt de la science d'indiquer, quand on le peut, la série des idées par lesquelles les inventeurs ont été conduits à leurs découvertes.

» Un jour donc, revenant avec lui de l'Académie, je lui demandai de quelle manière il était parvenu à sa découverte, et voici ce qu'il me répondit immédiatement avec sa simplicité et sa bonhomie ordinaires :

« J'avais remarqué que l'imperfection du théorème
» de Fourier tenait à ce que la suite des polynômes qu'il
» considérait pouvait perdre des variations sans que le
» premier s'annulât, c'est-à-dire sans que l'on passât par
» une racine de l'équation. Il résultait de là que la diffé-
» rence entre les nombres de variations correspondants
» à deux nombres donnés ne pouvait indiquer qu'une li-
» mite supérieure du nombre de racines comprises entre
» ces deux nombres, et non le nombre même de ces ra-
» cines.

» Je m'attachai donc à chercher s'il ne serait pas pos-
» sible de trouver des fonctions telles, qu'en y faisant
» varier x d'une manière continue, de la limite infé-
» rieure à la limite supérieure des racines réelles de l'é-
» quation, il ne se perdît de variations que quand x pas-
» serait par une valeur égale à l'une de ces racines. C'est
» à quoi je suis parvenu, comme vous le savez. »

» Ce problème, que sans doute Fourier avait dû chercher, mais qu'il n'a pas résolu et dont il n'a pas parlé, était bien celui qu'on devait se poser, mais rien n'indiquait le moyen de solution, et Sturm, en le découvrant, a peut-être donné la plus grande preuve de sa sagacité et de sa pénétration.

» Qu'il ait ensuite étendu ce théorème, qu'il l'ait rattaché à des méthodes plus générales de résolution d'équations, cela est étranger à la question actuelle, qui est de connaître la marche de son esprit dans la découverte de son théorème. Je ne l'ai fait connaître, il est vrai, que très-imparfaitement, puisque je n'ai indiqué que le problème auquel il a ramené la question; mais par quelle espèce de divination a-t-il été conduit à prendre les restes, changés de signes, auxquels conduit la recherche du commun diviseur entre le premier membre de l'équation et sa dérivée; c'est ce qu'il est impossible de savoir, et ce dont il avait peut-être lui-même perdu la trace, comme il arrive souvent dans les inventions auxquelles les déductions logiques ne suffisent pas et qui demandent ce qu'on appelle du génie. Il y a une illumination subite de l'esprit, qui dépend bien des idées qu'on a rassemblées, mais dont l'inventeur lui-même a un sentiment si rapidement effacé qu'il serait presque tenté de croire, comme on l'a si souvent dit, que c'est au hasard qu'il la doit.

» Quant à l'origine que M. Prouhet suppose au théorème de Sturm, il ne la fait pas connaître et se contente de citer le passage suivant de Sturm :

« J'ajoute que mon théorème sur les équations ne doit
» pas être considéré comme isolé. Il se rattache à une
» méthode générale de résolution qui s'applique à cer-
» taines équations algébriques déterminées qu'on ren-
» contre dans les problèmes les plus importants de la
» Mécanique céleste, de l'Astronomie et de la Physique
» mathématique. Mon travail sur les équations linéaires
» du deuxième ordre, qui m'a fait trouver les propriétés
» des racines des équations transcendantes, n'est qu'une
» partie de cette théorie générale, et ce n'est qu'en sui-
» vant cette voie qu'on pourra savoir quelque chose sur
» les équations à différences partielles d'ordres supé-
» rieurs. »

» Ce passage ne dit évidemment rien sur la manière dont il a été conduit au théorème primitif tel qu'il se trouve énoncé dans le *Bulletin des Sciences* de Férussac (année 1829). Ce serait donc d'après d'autres passages de Sturm que l'on pourrait supposer qu'il a donné une origine différente de celle que nous avons indiquée; mais il me paraît impossible que l'on en trouve de concluants, puisqu'il faudrait qu'à force de généralisations et d'applications il eût oublié le point de départ qu'il m'avait indiqué autrefois, et de manière à ce que je n'aie pu me méprendre.

» Je pense donc que M. Prouhet reconnaîtra que son opinion était fondée sur des interprétations (*) et non sur une assertion de l'auteur lui-même, et que, dans tous les cas, la marche que j'ai indiquée, d'après les paroles de Sturm, est celle qui est la plus conforme à l'esprit d'invention, et celle par conséquent qui lui fait le plus honneur et qu'il ne faut pas oublier. »

2. Des élèves de plusieurs Lycées nous ont récemment adressé des démonstrations de la proposition suivante :

Soit $f(x, y)$ l'équation d'une courbe du second degré. Si, d'un point M *dont les coordonnées sont (α, β), on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la polaire de ce point, et qu'on la prolonge jusqu'en* A, *où elle rencontre l'un des deux axes de la courbe, on trouve que $f(\alpha, \beta)$ est proportionnel au produit* MP.MA (t. III, p. 458).

Il a déjà été rendu compte (t. IV, p. 334) de différentes communications que nous avons reçues au sujet

(*) M. Prouhet a eu connaissance de la lettre de M. Duhamel, et voici ce qu'il m'a écrit peu de jours avant sa mort :

« Mon opinion se fondait sur une tradition assez probable; mais puisque » Sturm s'est expliqué là-dessus, et rien ne m'autorise à mettre en doute » la mémoire de M. Duhamel, l'affaire doit en rester là. » G.

de ce théorème. Nous ferons observer qu'il suffit de le démontrer pour les coniques rapportées à leurs axes. La démonstration est alors des plus simples; s'il s'agit, par exemple, de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

et que le point A soit sur l'axe $2a$, on trouve immédiatement

$$f(\alpha, \beta) = (\mathrm{MP}.\mathrm{MA}) \times a^2,$$

en remarquant que le produit MP.MA est égal à l'ordonnée β multipliée par la partie de cette ordonnée comprise entre le point M et sa polaire.

Quand le point A appartient à l'axe $2b$, on trouve, de même,

$$f(\alpha, \beta) = (\mathrm{MP}.\mathrm{MA}) \times b^2.$$

M. *Recoq* a remarqué que $f(\alpha, \beta)$ représente, à un facteur constant près, le rapport $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{CH}}$ des distances de la polaire au point M et au centre C de la courbe. Cela résulte évidemment de ce que la substitution des coordonnées du centre dans l'équation de la polaire donne une quantité constante. Dans le cas de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

on a, en valeur absolue,

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{CH}} \times a^2b^2.$$

Il s'ensuit

$$\mathrm{MA} \times \mathrm{CH} = b^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{MA} \times \mathrm{CH} = a^2,$$

suivant que le point A est sur l'axe $2a$ ou sur l'axe $2b$. Cette dernière proposition est due à M. Sadleir (*Traité des Sections coniques* de M. Salmon, p. 174). G.